Analisi III

A.A. 2024-2025
SIMONE SACCANI

TEORIA DELLA MISURA

X insieme non vuoto
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ famiglia di sottoinsiemi di X

DEF. $\mathcal{A}$ si dice σ-algebra su X se verifica
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
(ii) se $E \in \mathcal{A}$, allora $X \setminus E := E^c \in \mathcal{A}$
(iii) se $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, con I numerabile, allora $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathcal{A}$

Conseguenze
- $X \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ è chiusa per intersezione finita/numerabile

esempio
- σ-algebra minimale $\{\emptyset, X\}$
- σ-algebra massimale $\mathcal{P}(X)$
- X e $E \subsetneq X$ non vuoto $\{\emptyset, X, E, E^c\}$
- definisco $\mathcal{A} = \{A \subseteq X$ t.c. A è numerabile o A^c è numerabile$\}$
  è una σ-algebra

DEF. (X, τ) spazio topologico
Si può definire come σ-algebra la più piccola σ-algebra che contiene ogni aperto: si chiama σ-algebra dei boreliani, $\mathcal{B}(X)$.

Lemma X non vuoto, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-algebre su X.
Allora $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ è una σ-algebra su X.

corollario Data $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, posso associare in modo univoco a $\mathcal{E}$
$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra}}} \mathcal{A}$$

NOTAZIONE $\mathcal{E}$ si dice insieme di generatori per la σ-algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$

DEF. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice spazio mensurale
se $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ è una misura, ossia tale che
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\bigcup_{i\in I} E_i) = \sum_{i\in I} \mu(E_i)$ per $E_i \in \mathcal{A}, i \in I$ numerabile (numerabile additività)
  con $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall (i,j) \in I \times I, i \neq j$

esempio $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$
$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \#A < \infty \\ +\infty & \text{se } \#A = +\infty \end{cases} \qquad \mu_2(A) = \begin{cases} \#A & \text{se } \#A < +\infty \\ +\infty & \text{se } \#A = +\infty \end{cases}$$
μ_1 non è una misura, μ_2 è una misura (misura che conta i punti)

esempio $x_0 \in X$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$
$$\mu(A) = \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$ (delta di Dirac)

Oss Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e considero $Z \subseteq X$, c'è una σ-algebra naturale su Z ereditata da $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(Z) = \{A \cap Z : A \in \mathcal{A}\}$
È ben definita anche la misura $\mu|_{\mathcal{A}(Z)}$

Def. $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ misura, $\mathcal{A}$ σ-algebra su X,
si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$
Si dice **misura di probabilità** se $\mu(X) = 1$
Si dice **σ-finita** se $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $\mu(E_n) < +\infty$

esempio $\#$ è σ-finita, δ_{x_0} è finita

Def. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio mensurale
μ si dice **misura completa** se
$\forall E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) = 0$ vale $\forall F \subseteq E$ $F \in \mathcal{A}$ e $\mu(F) = 0$

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio mensurale, allora
- se $A \subseteq B$ e $A, B \in \mathcal{A}$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$
- $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- se $A \subseteq B$ e $\mu(A) < +\infty$, allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Oss μ è numerabilmente subadditiva, cioè
$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$$

Lemma $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio mensurale.
Valgono le seguenti proprietà di continuità
Sia $\{E_n\}$ successione di insiemi in $\mathcal{A}$ tali che
(a) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$ (successione crescente di insiemi)
allora $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$
(b) $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$ (successione decrescente di insiemi)
allora, se $\mu(E_1) < +\infty$, $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$

DIMOSTRAZIONE
(a) $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ per $n \geq 2$, $F_1 = E_1$
Si ha che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, quindi $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$
Se $\mu(E_{\bar{n}}) = +\infty$ per qualche $\bar{n}$, allora $\mu(E_n) = +\infty$ $\forall n \geq \bar{n}$
(b) Sia $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, siano $G_n = E_n \setminus E_{n+1}$
$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \cup E\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(G_n) + \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(E_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) + \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \quad \square$$

Controesempio a (b):
- $\mu = \mathcal{L}^1$, $E_n = [n, +\infty)$
- $\mu = \#$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $E_n = \{i \in \mathbb{N} : i \geq n\}$

DEF. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e sia Y uno spazio topologico
$f: X \longrightarrow Y$ si dice misurabile se
$\forall A$ aperto in Y $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

Nozioni equivalenti
Se (Y, d) è $\mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$
oppure $\geq, <, \leq$
$f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice misurabile $\iff$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

Proposizione Se $f, g: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili, anche $f+g$, $f \cdot g$ sono misurabili
Se $f_n: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili, anche $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ sono misurabili

In generale, se $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ ogni funzione continua su X a valori in (Y, d) è misurabile

Si definiscono le funzioni caratteristiche
$\forall E \in \mathcal{A}$ chiamo $\chi_E(x) = \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$

Si definiscono le funzioni semplici quelle che appartengono a $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \{\chi_E, E \in \mathcal{A}\}$
In particolare φ funzione semplice $\iff$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, $\exists E_1, \dots, E_m \in \mathcal{A}$ disgiunti
tali che $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$ (dove $E_i = \{x \in X : f(x) = \alpha_i\}$)

Sia φ una funzione semplice non negativa
Definisco $\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i)$ (se E_i disgiunti, con la convenzione $\alpha_i = 0 \longrightarrow \alpha_i \mu(E_i) = 0$)

Oss Con la convenzione sopra, $\int_X \varphi \, d\mu \in [0, +\infty]$ è ben definito

Sia $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile, $f \geq 0$
Definisco $$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \text{ semplice} \\ 0 \leq \varphi \leq f \text{ ovunque}}} \int_X \varphi \, d\mu \in [0, +\infty]$$

Sia $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile generica.
Si può dimostrare che se f, g misurabili, anche $f \wedge g$, $f \vee g$ sono misurabili
Quindi f^+ e f^- sono misurabili e ≥ 0

DEF. $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice integrabile
se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int_X f^- d\mu < +\infty$
Si definisce $\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$

DEF. $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice sommabile
se $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < +\infty$

Primi risultati

Si dimostra che sulla classe delle funzioni sommabili

- $\int_X f+g \, d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g \, d\mu$
- $\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f d\mu$
- se $f \leq g$, allora $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$
- f è sommabile $\iff$ $|f|$ è sommabile
  e vale $\left|\int_X f \, d\mu\right| \leq \int_X |f| \, d\mu$
- se $f=0$, allora $\int_X f \, d\mu = 0$
- se $\forall E \in \mathcal{A}$ $\; 0 = \int_E f \, d\mu$ $\qquad$ dove $\forall E \in \mathcal{A}$, f mis, $f \cdot \chi_E$ è mis
  $\Rightarrow f = 0$ μ-q.o. su X $\qquad \int_E f \, d\mu := \int_X f \chi_E \, d\mu$
  $(\exists F \in \mathcal{A}$ t.c. $\mu(F)=0$ e $f|_{X \setminus F} \equiv 0)$

DIMOSTRAZIONE

Caso $f \geq 0$: devo mostrare che, detto $F = \{x \in X : f(x) > 0\} \in \mathcal{A}$, vale $\mu(F)=0$

$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, quindi $f(x) \geq \frac{1}{n} \chi_{F_n}$

$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_X \frac{1}{n} \chi_{F_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(F_n) \quad \Rightarrow \mu(F_n) = 0 \;\; \forall n$

Quindi $\mu(F) = \mu(\bigcup_n F_n) = \lim_n \mu(F_n) = 0$

Caso f misurabile qualsiasi: $f = f^+ - f^-$, mostro che f^+, f^- sono μ-q.o. nulle

$(F_+ \in \mathcal{A}$ t.c. $\mu(F_+)=0$ e $f^+|_{F_+^c} \equiv 0$, analog. F_-. Posto $F = F_+ \cup F_-$ ho $\mu(F)=0$ e $f|_{F^c} \equiv 0)$

Considero $G^+ = \{x \in X : f^+(x) > 0\} \in \mathcal{A}$ $\qquad$ (quindi $f^-|_{G^+} \equiv 0$)

$\Rightarrow \forall E \in \mathcal{A} \quad \int_E f^+ d\mu = \int_{E \cap G^+} f \, d\mu = 0 \quad \Rightarrow f^+$ μ-q.o. nulla (per il caso precedente)

Analogo per f^- con G^-.

$\square$

Vale anche il viceversa

Conseguenza immediata:

$f = g$ μ-q.o. $\iff \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$

DEF. Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$, definiamo su $W = \{f : X \to Y \text{ sommabili}\}$ una relazione di equivalenza:

$f \sim g \iff f = g$ μ-q.o.

$W/\sim \; = L^1(X, \mu)$ è uno spazio vettoriale (reale o complesso)

Posso definire la norma $\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f| \, d\mu$

- $\int_X |f| \, d\mu = 0 \iff f = 0$ μ-q.o.
- $\int_X |\lambda f| \, d\mu = |\lambda| \int_X |f| \, d\mu$
- $\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu$

Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$

Si indica con $\mathcal{L}^d$ o più semplicemente $|\cdot|$

Sulla classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, scriviamo $\mathcal{L}^d(E) = |E|$

Vogliamo che $\mathcal{A}_{\mathcal{L}^d} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Definiamo la misura di Lebesgue sui compatti di $\mathbb{R}^d$

Considero la classe $\mathcal{P}$ dei pluirettangoli, cioè $\bigcup_{i=1}^{m} R_i$, con $R_i = [a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times [a_d^i, b_d^i]$

$\mathcal{L}^d(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^d(R_i) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{d} (b_j^i - a_j^i)$ con $\mathring{R}_i \cap R_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Dato K compatto in $\mathbb{R}^d$, definisco $\mathcal{L}^d(K) = \inf\{\mathcal{L}^d(P) : P \in \mathcal{P}, P \supseteq K\}$

Dato A aperto in $\mathbb{R}^d$, definisco $\mathcal{L}^d(A) = \sup\{\mathcal{L}^d(P) : P \in \mathcal{P}, P \subseteq A\}$

Sia E insieme limitato.

Si dice che E è misurabile secondo Lebesgue se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A$ aperto $\exists K$ compatto t.c. $K \subseteq E \subseteq A$, $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$

equivale a dire che su E si ha l'identità delle quantità

$\inf\{\mathcal{L}^d(A) : A \text{ aperto}, A \supseteq E\} = \sup\{\mathcal{L}^d(K) : K \text{ compatto}, K \subseteq E\} = \mathcal{L}^d(E)$

Sia E qualsiasi in $\mathbb{R}^d$

E è misurabile secondo Lebesgue $\Leftrightarrow \forall r > 0$ $E \cap B_r(0)$ è misurabile secondo Lebesgue

e poniamo $\mathcal{L}^d(E) = \lim_{r \to +\infty} \mathcal{L}^d(E \cap B_r(0))$

Abbiamo "definito" la nozione di insieme $E \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile secondo Lebesgue

$\mathcal{M}^d = \{E \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabili secondo Lebesgue$\}$ è una σ-algebra

e contiene i boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Si ha $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

si dimostra che esiste un insieme non $\mathcal{L}^1$-mis. in $[0,1]$ (insieme di Vitali)

insieme di Cantor $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$

ha la cardinalità del continuo

$\mathcal{L}^d$ è completa $\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ ma i boreliani sono $2^{\aleph_0}$

$\mathcal{L}^d(E) = \inf\{\mathcal{L}^d(A) : A \text{ aperto}, E \subseteq A\} = \inf\{\mathcal{L}^d(\bigcup_j P_j) : P_j \in \mathcal{P}, \bigcup_j P_j \supseteq E\}$

Si dimostra che $\mathcal{L}^d$ è numerabilmente additiva

$\mathcal{L}^d(\emptyset) = 0$ è facile $\Rightarrow \mathcal{L}^d$ è una misura

Posso considerare la nozione di misurabilità, integrabilità, sommabilità

per $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^k$

Confronto tra integrale di Lebesgue e integrale di Riemann

Proposizione Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata e integrabile secondo Riemann. Allora f è anche integrabile secondo Lebesgue, e vale

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L}^1$$

DIMOSTRAZIONE

<u>Oss</u> Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata: f integrabile s.L. $\Leftrightarrow$ f misurabile

Mi basta che f integrabile s.R. su $[a,b]$ è anche integrabile s.L.
Se f è integrabile s.R, allora è limite puntuale di funzioni semplici secondo Riemann $\varphi_n = \sum_{i=1}^{M_n} \alpha_i I_n^i$ $\Rightarrow$ è semplice anche s.L.

$$\Rightarrow \int_a^b f = \lim \int_{[a,b]} \varphi_n \, d\mathcal{L}^1 \underset{\uparrow}{=} \int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L}^1$$

teo. di passaggio al limite

□

Teorema di Vitali Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile s.R. se e solo se $\exists F$ tale che $\mathcal{L}^1(F)=0$ e $f|_{[a,b]\setminus F}$ è continua

Quali altri strumenti si usano per calcolare/stimare l'integrale s.L.?
Fubini-Tonelli e Cambio di variabile

<u>esercizi</u>

(1) Vedere che vale anche la seguente caratterizzazione degli $E\in\mathcal{M}^d$
$E\subseteq\mathbb{R}^d$ è misurabile s.L. $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists A$ aperto $\exists C$ chiuso t.c. $C\subseteq E\subseteq A$ e $\mathcal{L}^d(A\setminus C)<\varepsilon$

(2) Sia $f:(X,\mathcal{A},\mu)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ sommabile,
allora $\{x\in X: |f(x)|=+\infty\}$ ha misura nulla

(3) Dato $E\subseteq\mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue
Allora $\forall m\in[0,\mathcal{L}^1(E)]$ $\exists E'\subseteq E$, $E'\in\mathcal{M}^1$ e $\mathcal{L}^1(E')=m$

Teoremi di passaggio al limite

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, con μ misura completa

Riguardano successioni di funzioni misurabili $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Teorema di Severini-Egorov Sia $(X, \mathcal{A}(X), \mu)$ con $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili tali che $f_n \longrightarrow f$ per μ-q.o. $x \in X$.
Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E \in \mathcal{A}(X)$ con $\mu(E) < \varepsilon$ t.c. $f_n \xrightarrow{U} f$ su $X \setminus E$.

Oss Se tolgo $\mu(X) < +\infty$, non vale.

esempio $X = \mathbb{R}$, $\mu = \mathcal{L}^1$

$f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$

$f_n \longrightarrow 0$ $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$ ma $\sup |f_n - 0| = 1$

DIMOSTRAZIONE

Fissiamo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Per ogni n, definiamo $A_n^k = \{x \in X : |f_h(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \ \forall h \geq n\}$

$A_n^k \subseteq A_{n+1}^k$

Sia N t.c. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$

Dico che $\forall k$ fissato,

$$X \setminus N \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^k \subseteq X \implies \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^k\Big) = \lim_n \mu(A_n^k) = \mu(X)$$

Ora considero $X \setminus A_n^k =: E_n^k$, decrescente in n

$\implies \bigcap_n (X \setminus A_n^k) = X \setminus \bigcup_n A_n^k$ ha misura nulla (poiché $\mu(X) < +\infty$)

Quindi $\lim_{n \to +\infty} \mu(E_n^k) = \mu(\bigcap_n E_n^k) = 0$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists n_k$ t.c. $\mu(E_{n_k}^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

Dico che l'insieme cercato è $E = \bigcup_k E_{n_k}^k$

Infatti $\mu(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_{n_k}^k) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$

Ora $f_n \xrightarrow{U} f$ su $X \setminus E$:

$x \notin E_{n_k}^k \implies |f_h(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \ \forall h \geq n_k \quad \forall k$ $\square$

esercizio Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \varepsilon$ t.c. $f_n \xrightarrow{U} f$ su $X \setminus E$,
allora $f_n \longrightarrow f$ μ-q.o. $x \in X$

Lemma di Fatou Sia $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile
Allora $\liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu$

Oss L'ipotesi $f_n \geq 0$ può essere sostituita da $f_n \geq g$ q.o. con g sommabile

Lemma di Fatou Siano $f, f_n : X \to [0,+\infty]$ misurabili t.c. $f_n \to f$ μ-q.o.
Allora $\liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$.

DIMOSTRAZIONE

Suppongo $\liminf \int_X f_n \, d\mu < +\infty$ (altrimenti ovvio)

Sia h una funzione semplice t.c. $0 \leq h < f$ μ-q.o.

$\int_X f \, d\mu = \sup_{0\leq h\leq f} \int_X h \, d\mu$

Basta dimostrare $\int_X h \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$

Escludo che $\int_X h \, d\mu = +\infty$

h funzione semplice : $h(x) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$ con $E_j = \{x \in X : h(x) = \alpha_j\}, \alpha_j > 0$

Voglio applicare Egorov a $h_n = h \wedge f_n$

$\int_X h \, d\mu = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu(E_j)$

Se $\mu(E_j) = +\infty$, considero $A_{n,j} := \{x \in E_j : f_h(x) \geq \alpha_j \; \forall h \geq n\}$, allora $A_{n,j} \nearrow E_j \Longrightarrow \mu(A_{n,j}) \nearrow \mu(E_j) = +\infty$

poiché $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \geq h(x)$, cioè $A_n \supseteq E_j$

ASSURDO perché $M \geq \int_X f_n \, d\mu \geq \alpha_j \mu(A_{n,j})$ che è grande a piacere.

$\Rightarrow$ ogni E_j ha misura finita

$\Rightarrow \int_X h \, d\mu = \int_{\cup E_j} h \, d\mu$ con $\mu(\cup E_j) < +\infty$

allora $h_n := h \wedge f_n$ verifica le ipotesi di Egorov

Ora $h_n \xrightarrow{P} h \wedge f = h$

Dico $\int_X h_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$

$\int_{\cup E_j} h_n \, d\mu \longrightarrow \int_X h \, d\mu$

$0 \leq h_n \leq \sup_{j=1,\dots,M} \alpha_j$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists E \in \mathcal{A}$ t.c. $\mu(E) < \varepsilon$ e $h_n \xrightarrow{U} h$ su $X \setminus E$

$\left| \int_{\cup E_j} h_n - h \, d\mu \right| \leq \underbrace{\int_{\cup E_j \setminus E} |h_n - h| \, d\mu}_{\to 0} + \underbrace{\int_E |h_n - h| \, d\mu}_{\leq 2\sup \alpha_j \, \mu(E)}$

Passo al limsup $\left| \int_{\cup E_j} h_n - h \, d\mu \right| \leq \limsup \sup_{\cup E_j \setminus E} |h_n - h| + c\varepsilon = c\varepsilon$ □

Teorema di convergenza monotona (Beppo Levi) Sia $f_n : X \to [0,+\infty]$ misurabile e crescenti in n.
Allora $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu$.

<u>Oss</u> L'ipotesi $f_n \geq 0$ può essere sostituita da $f_n \geq g$ q.o. con g sommabile e f_n crescenti in n q.o.

DIMOSTRAZIONE

$f_n \nearrow f$ puntualmente, quindi

$\int_X f \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ □

Teorema di convergenza dominata (Lebesgue)

Siano $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili t.c.

- $\exists f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $f_n \longrightarrow f$ μ-q.o. su X
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $|f_n| \leq g$ μ-q.o. su X, $g \in L^1(X)$.

Allora $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$

e vale anche $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

DIMOSTRAZIONE

$|f_n| \leq g \Rightarrow -g \leq f_n \leq g$ μ-q.o. $\Rightarrow f_n + g \geq 0$, $g - f_n \geq 0$ μ-q.o.

e $f_n + g \longrightarrow f + g$, $g - f_n \longrightarrow g - f$ μ-q.o.

Applico Fatou a entrambe le successioni:

$\liminf \int_X f_n + g \, d\mu \geq \int_X f + g \, d\mu$

$\overset{\parallel}{\liminf \int_X f_n d\mu + \int_X g d\mu}$ $\Rightarrow \liminf \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$

$\liminf \int_X g - f_n \, d\mu \geq \int_X g - f \, d\mu$ Noto che $f \in L^1(X,\mu)$

$\overset{\parallel}{\liminf \int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu}$ $\overset{\parallel}{\int_X g d\mu} - \int_X f d\mu$

$\liminf \int_X g d\mu - \limsup \int_X f_n d\mu$ $\Rightarrow \limsup \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$

Quindi $\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Ora $g_n = |f_n - f| \longrightarrow 0$ e $g_n \leq |f| + |f| \leq 2g \in L^1(X,\mu)$

$\Rightarrow \int_X g_n d\mu \longrightarrow \int_X 0 \, d\mu = 0$ $\square$

Siano $(X_1, \mathcal{A}(X_1), \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}(X_2), \mu_2)$ spazi mensurali

È possibile definire la misura prodotto $\mu_1 \otimes \mu_2$ sulla σ-algebra su $X_1 \times X_2$ che contiene gli insiemi della forma $E_1 \times E_2$, $E_1 \in \mathcal{A}(X_1)$, $E_2 \in \mathcal{A}(X_2)$

Dato $E \in \mathcal{A}(X_1 \times X_2)$, si può dimostrare che

per μ_2-q.o. $x_2 \in X_2$ $E_{x_2} = \{x_1 \in E_1 : (x_1, x_2) \in E\} \in \mathcal{A}(X_1)$

per μ_1-q.o. $x_1 \in X_1$ $E_{x_1} = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in E\} \in \mathcal{A}(X_2)$

data $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile, allora

per μ_2-q.o. $x_2 \in X_2$ $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ è μ_1-misurabile

Allora vale, se $f \geq 0$, che

$$\int_E f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_2} d\mu_2 \int_{E_{x_2}} f(x_1,x_2) \, d\mu_1 = \int_{X_1} d\mu_1 \int_{E_{x_1}} f(x_1,x_2) \, d\mu_2$$

Se f è sommabile rispetto a $\mu_1 \otimes \mu_2$, vale

$$\int_E f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_2} d\mu_2 \int_{E_{x_2}} f(x_1,x_2) \, d\mu_1 = \int_{X_1} d\mu_1 \int_{E_{x_1}} f(x_1,x_2) \, d\mu_2$$

Metodi di calcolo degli integrali

Siamo in $\mathbb{R}^d$

- Devo calcolare $\int_\Omega f(x)\,dx$, Ω misurabile (aperto), f sommabile o ≥ 0

  $x = \Phi(y)$, $\Phi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ diffeomorfismo

  $\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\tilde{\Omega}} f(\Phi(y))\,|\det D\Phi|\,dy$

- $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \begin{cases} \|x\| = \sqrt{\sum x_i^2} \\ \frac{x}{\|x\|} \in S^{d-1} \end{cases}$

  Conseguenze:

  $\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|)\,dx = d\omega_d \int_0^{+\infty} f(\rho)\,\rho^{d-1}\,d\rho$

- Fubini-Tonelli $\quad \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$

  $f \geq 0$ o sommabile, allora

  $\int_E f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)\,dx_1 \dots dx_d = \int dx_1 \dots dx_n \int_{\underbrace{E^{x_1,\dots,x_n}}_{\{(y_1,\dots,y_k)\in\mathbb{R}^k \,:\, (x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_k)\in E\}}} f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)\,dy_1 \dots dy_k$

<u>esercizio</u> In $\mathbb{R}^2$, consideriamo $D = \{(x,y) : y^2 < x^6\}$ e $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$

Dire per quali $p \in [1,+\infty]$ $f \in L^p(D)$

Se $p \in \mathbb{R}$

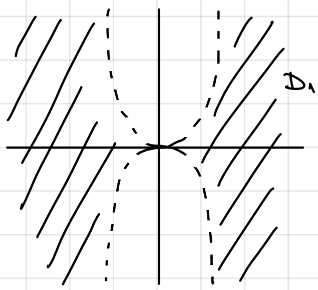
$f \in L^p(D,\mathcal{L}^2) \iff |f|^p \in L^1(D,\mathcal{L}^2)$

$f \in L^\infty(D,\mathcal{L}^2) \iff \exists M \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq M$ $\forall x \in D \setminus N$ con N di misura nulla

<u>Passo 1</u> Disegno D

Noto subito che D ha simmetria

lo disegno su $x>0, y>0$: $0 < y < x^3$



$\int_D f^p\,dx = 4\int_{D_1} f^p\,dx$

$\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{x^2+2y^2} \leq \frac{1}{x^2+y^2}$

Quindi $f \in L^p(D_1,\mathcal{L}^2) \iff g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \in L^p(D_1,\mathcal{L}^2)$

$g \in L^p(D_1,\mathcal{L}^2) \iff \int_{D_1} |g|^p\,d\mathcal{L}^2 < +\infty$, cioè

$+\infty > \int_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_{\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2p}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2-2p} \underbrace{\rho^{2-2p}\Big|_{\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}}}^{+\infty}}_{<+\infty \iff 2-2p<0 \iff p>1} d\theta =$

$= \frac{1}{2-2p}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)^{1-p} d\theta = \frac{1}{2-2p}\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^3\theta)^{p-1}}{(\sin\theta)^{p-1}}\,d\theta \iff p-1<1 \iff p<2$

e $\sin\theta \underset{\theta\to 0}{\sim} \theta$

Fubini-Tonelli vale su ogni spazio prodotto $X_1 \times X_2$ con $\mu_1 \otimes \mu_2$
e dice che, se $f \geq 0$ o $|f| \in L^1(X_1 \times X_2)$

$\int_{E_1 \times E_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_1\,d\mu_2 = \int_{E_1} d\mu_1 \int_{E_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2$

Se $\mu_1 = \#$, possiamo scambiare serie e integrale

SPAZI L^p

$(X, \mathcal{A}(X), \mu)$ spazio mensurale

DEF. Definiamo $L^1(X,\mu;\mathbb{K}^d) := W/\sim$, dove
$W = \{f: X \to \mathbb{K} \text{ sommabili}\}$ e $f \sim g \iff f = g \ \mu\text{-q.o.}$

<u>Oss</u> $f \in L^1(X,\mu;\overline{\mathbb{R}}) \implies |f(x)| < +\infty$ per μ-q.o. $x \in X$

DEF. Definiamo per $p \geq 1$
$L^p(X,\mu;\mathbb{K}^d) = \{ f \in \mathcal{M}(X,\mu;\mathbb{K})/\sim \ | \ |f|^p \in L^1(X,\mu;\mathbb{K}^d) \}$
con $f \sim g \iff f = g \ \mu$-q.o.

Definiamo per $p = +\infty$
$L^\infty(X,\mu;\mathbb{K}^d) = \{ f \in \mathcal{M}(X,\mu;\mathbb{K}^d)/\sim \ | \ \exists M > 0 \cdot |f(x)| \leq M \ \mu\text{-q.o. } x \in X \}$
cioè $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| \leq M$

<u>NOTA</u> Avremo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, scriveremo $L^p(X,\mu)$

Quelli definiti sopra sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$
Data $f \in L^p$, $p \in [1,+\infty]$
$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad |\lambda f| = |\lambda||f| \implies \lambda f \in L^p$
Presa $g \in L^p$, $\quad |f+g|(x) \leq |f(x)| + |g(x)|$
$$|f+g|^p(x) = \left|2\frac{f+g}{2}\right|^p(x) = 2^p\left|\frac{f}{2}+\frac{g}{2}\right|^p(x) \leq 2^p\frac{|f(x)|^p}{2} + 2^p\frac{|g(x)|^p}{2} = 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$
$(0,+\infty) \ni t \longmapsto t^p \in \mathbb{R}$ è convessa $\forall p \geq 1$

$\implies f+g \in L^p$

DEF. Definiamo la norma $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu;\mathbb{K})}$:

- se $p \geq 1$ $\quad \|f\|_{L^p(X,\mu;\mathbb{K})} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

  se $p = +\infty$ $\quad \|f\|_{L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})} = \inf\{M : |f(x)| \leq M \ \mu\text{-q.o. } x \in X\}$

Se $p \geq 1$, è facile vedere che $\|\cdot\|_{L^p}$ verifica
$\|f\|_{L^p} = 0 \iff f = 0 \ \mu$-q.o. $x \in X$
$\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
Se $p = +\infty$
$\|\lambda f\|_{L^\infty} = |\lambda| \, \|f\|_{L^\infty}$
$\|f\|_{L^\infty} = 0 \iff f = 0 \ \mu$-q.o. $x \in X$
$(\Leftarrow)$ è chiara
Per $(\Rightarrow)$ e la disuguaglianza triangolare, serve la stessa idea

Lemma Sia $f \in L^\infty(X,\mu,\mathbb{K})$.
Allora $\|f\|_{L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})} = \min\{M : |f(x)| \le M \ \mu\text{-q.o. } x \in X\}$

DIMOSTRAZIONE

Chiamo $L = \|f\|_{L^\infty} \in [0,+\infty)$
$\Rightarrow \exists M_j \in \{M : |f(x)| \le M \ \mu\text{-q.o.}\}$ t.c. $M_j \longrightarrow L$
Devo vedere che $L \in \{M : |f(x)| \le M \ \mu\text{-q.o.}\}$
$\forall j \ \exists N_j$ con $\mu(N_j) = 0$ e $|f(x)| \le M_j \ \forall x \in X \setminus N_j$
Pongo $N = \bigcup_j N_j$, da cui $\mu(N) = 0$
Preso $x \in X \setminus N$, allora $|f(x)| \le M_j \ \forall j$
Passo al limite su j: $|f(x)| \le L$ $\square$

Quindi $\|f\|_{L^\infty} = 0 \Rightarrow |f(x)| \le 0 \Rightarrow f \sim 0$

Per la disuguaglianza triangolare, siano $f, g \in L^\infty$,
$L_f = \|f\|_{L^\infty}$, $L_g = \|g\|_{L^\infty}$
$\Rightarrow \forall x \in X \setminus (N_f \cup N_g)$ vale $|f(x)| \le L_f$, $|g(x)| \le L_g$
$\Rightarrow |f+g|(x) \le |f(x)| + |g(x)| \le L_f + L_g$
$\Rightarrow \|f+g\|_{L^\infty} = \inf\{M : |f+g|(x) \le M \ \mu\text{-q.o. } x \in X\} \le L_f + L_g = \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$

Nel caso $p \in [1,+\infty)$, manca la disuguaglianza triangolare.
Per $p=1$, è ovvia

Lemma: disuguaglianza di Young $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale
$$|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p \in (1,+\infty)$$

DIMOSTRAZIONE

Deriva dalla concavità di $\log(t)$
Se $x=0$ o $y=0$, è ovvia
$\frac{1}{p} = \lambda \in (0,1)$, $\frac{1}{q} = 1-\lambda$
$$\log\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}\right) \ge \lambda \log(|x|^p) + (1-\lambda)(\log|y|^q) = \log|x| + \log|y| = \log|xy|$$
L'esponenziale è crescente, da cui la tesi $\square$

<u>Oss</u> Poiché $\log(t)$ è strettamente concava, l'uguaglianza vale se e solo se $|x|^p = |y|^q$ (oppure $\lambda = 0,1$)

Proposizione: disuguaglianza di Hölder

Sia $p \in [1,+\infty]$, definisco q (esponente coniugato di p) come $q = \begin{cases} +\infty & \text{se } p=1 \\ 1 & \text{se } p=+\infty \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 & \text{altrimenti} \end{cases}$ (cioè $q = \frac{p}{p-1}$)

Se $f,g : X \to \mathbb{K}$ misurabili, allora
$$\int_X |f\cdot g|(x)\,d\mu \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \qquad p\in(1,+\infty)$$
con la convenzione

- se $p=1, q=+\infty$ (con $g\in L^\infty$) $\int_X |f\cdot g|(x)\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu \cdot \|g\|_{L^\infty(X,\mu;\mathbb{K})}$
- analogo se $p=+\infty, q=1$ (con $f \in L^\infty$)

DIMOSTRAZIONE

I casi particolari seguono subito da $|f\cdot g|(x) \le |f(x)|\,\|g\|_{L^\infty}$ per μ-q.o. $x\in X$

Per $p\in(1,+\infty)$

Osservo che se $f=0$ μ-q.o. o $g=0$ μ-q.o., è ovvia

Ci possiamo ridurre a $\|f\|_{L^p}>0$ e $\|g\|_{L^q}>0$ (i casi $\|f\|_{L^p}=+\infty$, $\|g\|_{L^q}=+\infty$, sono ovvi)

Posso dividere per $\|f\|_{L^p}$ e $\|g\|_{L^q}$ e dimostrare che
$$\int_X |fg|\,d\mu \le 1 \qquad \forall f,g : \|f\|_{L^p}=1,\ \|g\|_{L^q}=1 \quad (\tilde{H})$$
Infatti, se dimostro $(\tilde{H})$, la posso applicare a $\frac{f}{\|f\|_{L^p}}$ e $\frac{g}{\|g\|_{L^q}}$, con $f\in L^p, g\in L^q$

Applico la dis. di Young a $X=|f(x)|$ e $Y=|g(x)|$:
$$|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q} \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x\in X$$
Integro e ottengo
$$\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu \le \frac{1}{p}\int_X |f(x)|^p + \frac{1}{q}\int_X |g(x)|^q\,d\mu = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$
□

Oss Per Young, l'uguaglianza vale sse $|f|^p = c|g|^q$

Proposizione: disuguaglianza di Minkowski

$\forall f,g \in L^p(X,\mu;\mathbb{K})$, si ha
$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

DIMOSTRAZIONE

So che $f+g \in L^p \implies |f+g| < +\infty$ μ-q.o.
$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|f+g|(x) \le |f(x)+g(x)|^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|) =$$
$$= \underbrace{|f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|}_{(I)} + \underbrace{|f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|}_{(II)}$$
Voglio applicare Hölder ai due termini

(I) $\underset{\in L^q}{|f(x)+g(x)|^{p-1}}\ \underset{\in L^p}{|f(x)|}$ $\qquad q=\frac{p}{p-1}$

infatti $\int_X (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q\,d\mu = \int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu < +\infty$
$$\implies \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,d\mu \le \left(\int_X (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p}$$
(II) Analogamente
$$\int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,d\mu \le \left(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \|g\|_{L^p}$$
Quindi, integrando otteniamo
$$\underbrace{\int_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu}_{\|f+g\|^p_{L^p}} \le \underbrace{\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}}_{\|f+g\|^{p-1}_{L^p}} (\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})$$
Dividendo (se fosse $\|f+g\|_{L^p}=0$, la disuguaglianza è ovvia)
$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$
□

Abbiamo mostrato che $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ è uno spazio vettoriale normato.
Vediamo ora che è completo rispetto alla distanza indotta dalla norma.

Teorema $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ è uno spazio di Banach.
Inoltre ogni $\{f_n\} \subseteq L^p$ di Cauchy ammette una sottosuccessione f_{n_k} convergente μ-q.o. a f, limite in L^p di f_n.

DIMOSTRAZIONE

Scelgo la sottosuccessione f_{n_k}

$\{f_n\} \subseteq L^p$ è di Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\|f_n - f_m\|_{L^p} < \varepsilon \ \forall n,m \geq n_\varepsilon$

$\forall k \in \mathbb{N}$, scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ e seleziono $1 \longmapsto n_1$

$\vdots$

$k \longmapsto n_k > \max\{n_{k-1}, n_{\frac{1}{2^k}}\}$

f_{n_k} è la sottosuccessione con la proprietà

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$$

Introduco per $N \in \mathbb{N}$

$$g_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

Dico che $g_N \in L^p \ \forall N$

Uso Minkowski sugli N termini

$$\|g_N\|_{L^p} = \Big\| \sum_{k=0}^{N-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \Big\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} < 2$$

$\Rightarrow g_N \in L^p \Rightarrow g_N^p \in L^1$

Applico Beppo Levi, infatti g_N è crescente e $g_N \nearrow g = \sup g_n$

$g_N \in L^p \Rightarrow \int_X g^p \, d\mu = \int_X \sup_N g_N{}^p \, d\mu = \lim_N \int_X g_N^p \leq 2^p$

$\Rightarrow g \in L^p \Rightarrow g(x)$ finita μ-q.o.

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ converge assolutamente per μ-q.o. $x \in X$

$\Rightarrow$ converge $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) = \lim_{M \to +\infty} f_{n_M}(x) - f_{n_0}(x)$

Chiamo $f(x) = h(x) + f_{n_0}(x)$ $\quad h, f_{n_0} \in L^p \Rightarrow f \in L^p$

$f_{n_k} \longrightarrow f$ in L^p per il teorema di Lebesgue (convergenza dominata)

Infatti $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ μ-q.o., $|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq |g(x)| + |f_{n_0}(x)|$ $\square$

corollario Se $f_n \longrightarrow f$ in L^p, allora esiste una sottosuccessione t.c. $f_{n_k} \longrightarrow f$ μ-q.o.

<u>esempio</u> La successione T_n definita da (macchina da scrivere)

$T_0 = \chi_{[0,1]}$, $T_1 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $T_2 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$, $T_3 = \chi_{[0,1/4]}$, $T_4 = \chi_{[1/4,1/2]}$, ...

è tale che $T_n \longrightarrow 0$ in L^p, ma $T_n \not\longrightarrow 0$ q.o.

Questo diventa vero se consideriamo una sottosuccessione adatta

Contenimenti tra spazi L^p

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura

Proposizione Sia f misurabile con $\|f\|_{L^\infty} > 0$. Sia $\phi: p \longmapsto \int_X |f|^p d\mu$ e sia $E_f = \{p : \phi(p) < +\infty\}$. Allora valgono:
(a) Se $r<p<s$ e $r,s \in E$, allora $p \in E$, ovvero $L^r \cap L^s \subseteq L^p$
(b) $\log\phi$ è convessa e continua su E
(c) Se $X = \mathbb{R}^d$, qualsiasi $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo esiste f t.c. $E_f = I$
(d) Se $f \in L^p$ $\forall p \geq p_0$, allora $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$

DIMOSTRAZIONE

(a) Vale la stima $|f(x)|^p \leq |f(x)|^r + |f(x)|^s \in L^1$, poiché $|f|^r, |f|^s \in L^1$
$\implies |f(x)|^p \in L^1 \implies f \in L^p$

(b) $r<p<s$: $p = \lambda r + (1-\lambda)s$, $\lambda \in (0,1)$

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^{r\cdot\lambda} |f|^{s(1-\lambda)} d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_X |f|^r d\mu\right)^\lambda \left(\int_X |f|^s d\mu\right)^{1-\lambda}$$

$|f| \in L^r \implies |f|^{r\lambda} \in L^{\frac{1}{\lambda}}$
$|f| \in L^s \implies |f|^{s(1-\lambda)} \in L^{\frac{1}{1-\lambda}}$) esp. coniugati

$\implies \phi(p) \leq \phi(r)^\lambda \phi(s)^{1-\lambda} \implies \log\phi(p) \leq \lambda\log\phi(r) + (1-\lambda)\log\phi(s)$
$\implies \log\phi$ convessa

Per la continuità negli estremi, se ad esempio $p_n \to s^-$
di nuovo $|f|^{p_n} \leq |f|^s + |f|^r \in L^1$ e $|f|^{p_n} \longrightarrow |f|^s$, quindi
per convergenza dominata $\int_X |f|^{p_n} d\mu \xrightarrow[p_n \to s]{} \int_X |f(x)|^s d\mu$, cioè $\phi(p_n) \longrightarrow \phi(s)$

(d) Se $\|f\|_{L^\infty} = 0$, è chiaro

Se $0 < \|f\|_{L^\infty} < +\infty$, wlog supponiamo $\|f\|_{L^\infty} = 1$
Sia $A_\delta = \{x \in X : f(x) \geq 1-\delta\}$: allora $\forall \delta > 0$ $\mu(A_\delta) > 0$.
Mostriamo che $\forall (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [p_0, +\infty)$, $p_n \nearrow +\infty$ vale $\lim_{n\to+\infty} \|f\|_{L^{p_n}} = \|f\|_{L^\infty}$
Vale che $|f(x)|^{p_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \chi_{A_0}(x)$ e $|f(x)|^{p_n} \leq |f(x)|^{p_0}$ μ-q.o. $x \in X$, quindi

$$\int_X |f(x)|^{p_n} d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X \chi_{A_0}(x) d\mu = \mu(A_0) \geq 0$$

Quindi $\|f\|_{L^{p_n}} = \left(\int_X |f(x)|^{p_n} d\mu\right)^{\frac{1}{p_n}} = (\mu(A_0) + o(1))^{\frac{1}{p_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ se $\mu(A_0) \neq 0$

Perciò $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{L^{p_n}} \leq 1$

Ora fissiamo $\delta > 0$: $\left(\int_X |f(x)|^{p_n} d\mu\right)^{\frac{1}{p_n}} \geq \left(\int_{A_\delta} (1-\delta)^{p_n} d\mu\right)^{\frac{1}{p_n}} = (1-\delta)(\mu(A_\delta))^{\frac{1}{p_n}}$
$\implies \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{L^{p_n}} \geq (1-\delta) \liminf_{n\to+\infty} (\mu(A_\delta))^{\frac{1}{p_n}} = 1-\delta$
$\implies \lim_{n\to+\infty} \|f\|_{L^{p_n}} = 1$

Se $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$, mostro che $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{L^{p_n}} > m$ $\forall m \in \mathbb{N}$
Dato $m \in \mathbb{N}$, sia $g_m = |f| \wedge m$, che rientra nel caso precedente
$\|f\|_{L^{p_n}} \geq \left(\int_X g_m^{p_n} d\mu\right)^{\frac{1}{p_n}} \longrightarrow m$ $\square$

Lemma Se $\mu(X)=1$, allora
(i) $\|f\|_{L^r} \le \|f\|_{L^s} \quad \forall\, 1\le r<s\le+\infty$
(ii) $\|f\|_{L^r} = \|f\|_{L^s}$ per $r\ne s \iff f=c$ μ-q.o.

DIMOSTRAZIONE
(i) $\|f\|_{L^r}^r = \int_X |f|^r \, d\mu \overset{\text{Hö}}{\le} \left(\int_X |f|^{r\cdot\frac{s}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_X 1^{\frac{s}{s-r}} d\mu\right)^{\frac{s-r}{s}} = \|f\|_{L^s}^r$
(ii) ($\Leftarrow$) chiaro
($\Rightarrow$) L'uguaglianza in Hölder vale se e solo se $|f|^r = c|f|^s$
$\Rightarrow |f| = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{s-r}}$ □

Proposizione Se $\mu(X)<+\infty$, allora
$$L^q \hookrightarrow L^p \quad \forall\, 1\le p<q\le+\infty$$
e l'immersione è continua.

DIMOSTRAZIONE
Gli esponenti $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$ sono coniugati, quindi
$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f|^p \, d\mu \underset{\text{Hö}}{\le} \left(\int_X |f|^{p\cdot\frac{q}{p}} d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1^{\frac{q}{q-p}} d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_{L^q}^p (\mu(X))^{\frac{q-p}{q}}$
$\Rightarrow \|f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^q} (\mu(X))^{\frac{q-p}{pq}}$
Quindi se $f\in L^q$, allora $f\in L^p$. □

Def. Definiamo per $p\ge1$
$\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{H}^0) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$ con norma $\|\underline{x}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
e $\ell^\infty := L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{H}^0) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_n |x_n| < +\infty\}$ con norma $\|\underline{x}\|_{\ell^\infty} = \sup_n |x_n|$
(dove $\mathcal{H}^0 = \#$ è la misura che conta i punti)

Proposizione Se $1\le p<q\le+\infty$, allora $\ell^p \subseteq \ell^q$

DIMOSTRAZIONE
Chiaramente $\ell^p \subseteq \ell^\infty$ $\forall\, 1\le p<+\infty$, poiché
$|x_k| = (|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\underline{x}\|_{\ell^p} = m \in\mathbb{R} \Rightarrow \|\underline{x}\|_{\ell^\infty} = \sup_k |x_k| \le m$
Se invece sia p che q sono finiti, se $\underline{x}\in\ell^p$, allora
necessariamente $x_n \longrightarrow 0$, quindi $|x_n|\le 1$ definitivamente
$\Rightarrow |x_n|^q \le |x_n|^p$ definitivamente, dunque $\|\underline{x}\|_{\ell^q} < +\infty \Rightarrow \underline{x}\in\ell^q$ □

convergenza di funzioni

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di misura

DEF. Date $f_n : X \to \mathbb{R}$ misurabili, si dice che $f_n \to f$ in misura se
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n}$ t.c. $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$, o equivalentemente
$\forall \varepsilon > 0 \; \lim_{n \to +\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$

Abbiamo quindi possibili tipi di convergenza:

- $f_n \to f$ q.o.
- $f_n \to f$ in L^p
- $f_n \to f$ in misura

esempio

funz	CV q.o.	CV in misura	CV in L^p
$\chi_{[n,n+1)}$	SI	NO	NO
$\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$	SI	SI	$p=1$ NO, $p>1$ SI
$n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$	SI	SI	NO
T_n	NO	SI	SI

proposizione (1) Se $f_n \to f$ in L^p, allora $f_n \to f$ in misura.
(2) Se $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f$ μ-q.o., allora $f_n \to f$ in misura.
(3) Se $f_n \to f$ in misura, allora $\exists n_k \nearrow +\infty$ t.c. $f_{n_k} \to f$ μ-q.o

DIMOSTRAZIONE

(1) $0 \longleftarrow \|f_n - f\|_{L^p}^p = \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \geq \int_{\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon\}} \varepsilon^p \, d\mu = \varepsilon^p \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$
Quindi $\exists \bar{n}$ t.c. $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon$, ossia $f_n \to f$ in misura.

(2) Dato $\varepsilon > 0$, per Egorov $\exists E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ t.c.
$f_n \xrightarrow{U} f$ su $X \setminus E_\varepsilon$. Poiché la convergenza è uniforme,
$\exists \bar{n}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \; \forall x \in X \setminus E_\varepsilon$
Dunque $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$,
quindi $f_n \to f$ in misura.

(3) $\forall k \; \exists n_k$ t.c. $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}) \leq 2^{-k} \quad \forall n \geq n_k$
Posso supporre $n_k < n_{k+1} \; \forall k$
Sia $E_k := \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}$ e $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k$
Vale $\mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k) \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} = 0$
Se $x \notin E$, allora esiste n_x t.c. $\forall k \geq n_x \; x \notin E_k$
$\Rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2^{-k} \Rightarrow f_{n_k} \to f$ μ-q.o.

$\square$

sottospazi densi in $L^1(X,\mu;\mathbb{K}^d)$

Il caso $p=+\infty$ ha risultati meno interessanti

Se $f\in L^1(X,\mu;\mathbb{R})$ (lo stesso vale per L^p, p reale)
posso considerare come approssimazione di f

$$f_n = \min\{n, \max\{f,-n\}\} = n\wedge(f\vee(-n))$$

$f_n \equiv f$ su $\{x\in X : |f(x)|<n\} =: F_n$

Si vede facilmente che $f_n \longrightarrow f$ μ-q.o.

Infatti $f_n = f$ definitivamente per $x\in \bigcup_n F_n$

e $X\setminus \bigcup F_n = \{x\in X : |f(x)|=+\infty\}$ che ha misura nulla perché $f\in L^1$

Concludo per Lebesgue ($|f_n|\le f$) che

$$f_n \longrightarrow f \text{ in } L^1$$

Quindi $L^\infty \cap L^p(X,\mu;\mathbb{K}^d)$ è denso in $L^p(X,\mu;\mathbb{K}^d)$

Sia $f\in L^1(X,\mu;\mathbb{R})$

$\forall n\geq 1$ $\{x\in X : |f(x)|\geq \frac{1}{n}\} = G_n$ risulta $\mu(G_n)<+\infty$

perché $+\infty > \int_X |f|\,d\mu \geq \int_{G_n} \frac{1}{n}\,d\mu = \frac{1}{n}\mu(G_n)$

La successione $\{f\chi_{G_n}\}\subseteq L^1(X,\mu;\mathbb{R})$

e approssima f in $L^1(X,\mu;\mathbb{R})$ (o p reale)

$\bigcup_n G_n = \{x\in X : |f(x)|>0\}$ e posso usare il teorema di Lebesgue,

poiché $f\chi_{G_n} \longrightarrow f$ μ-q.o. e $|f\chi_{G_n}|\le |f|$

Queste sono approssimazioni con funzioni a supporto di misura finita

Se ad esempio X è metrico, sono dense in L^p (p reale)

$\{f$ a supp limitato di misura finita e limitate$\}$

Data $f\in L^1(X,\mu;\mathbb{R})$, possiamo supporre $f\in L^\infty\cap L^1$ con supporto di misura finita

$\operatorname{Im} f \subseteq [-\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^\infty}]$ (posso supporre $\|f\|_{L^\infty}=1$)

Divido l'intervallo in $2n$ pezzi ed introduco

$\forall k\in[-n,n-1]$ $E_n^k = \{x\in X : \frac{k}{n}\le f(x) < \frac{k+1}{n}\}$ (partizione di supp f)

Definisco $\varphi_n(x) = \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{k}{n}\chi_{E_n^k}$ funzione semplice ($\mu(E_n^k)\le \mu(\operatorname{supp} f)<+\infty$)

t.c. $\varphi_n \nearrow f$ μ-q.o.

$$\int_X |f-\varphi_n|\,d\mu = \int_X \sum_{k=-n}^{n-1} \left|f(x)-\frac{k}{n}\right|\chi_{E_n^k}\,d\mu \le \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1}\mu(E_n^k) \le \frac{1}{n}\mu(\operatorname{supp} f) \longrightarrow 0$$

Caso $\mu=\mathcal{L}^d$, $X=\mathbb{R}^d$

> **Proposizione** Per $p\geq 1$ reale, il sottospazio $C_c^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{K}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{K}^n)$

DIMOSTRAZIONE

Per quanto visto sopra, mi basta approssimare in L^p con funzioni C_c^0 la funzione χ_E con $\mathcal{L}^d(E)<+\infty$

Dato che ho la misura di Lebesgue,

$\forall \varepsilon>0$ $\exists A_\varepsilon$ aperto, K_ε compatto t.c. $K_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$ e $\mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$

Mi concentro sulla coppia $(A_\varepsilon, K_\varepsilon)$

Per il lemma di Urysohn $\exists g_\varepsilon : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ continua t.c.

$g_\varepsilon \equiv 0$ su A_ε^c e $g_\varepsilon \equiv 1$ su K_ε

e $\int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x) - \chi_E|^p \, d\mathcal{L}^p = \int_{A_\varepsilon} |g_\varepsilon(x) - \chi_E|^p \, d\mathcal{L}^p \leq 2^p \mu(A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < 2^p \varepsilon$

$\Longrightarrow g_\varepsilon \longrightarrow \chi_E$ in L^p per $\varepsilon \to 0$, con $g_\varepsilon \in C^0 \cap L^p$

Questo ci dice che $C^0 \cap L^p$ è denso in L^p.

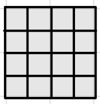
Per ottenere una successione $g_n \in C_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ che approssima χ_E, basta considerare $g_{B_{n+1}, B_n} = \begin{cases} 1 & \text{su } B_n \\ 0 & \text{su } B_{n+1}^c \end{cases}$ continua e definire $\varphi_n = g_{B_{n+1}, B_n} \, g_{\frac{1}{n}}$ (funzione cut-off) □

corollario $C^0 \cap L^p$ o $C_c^0 \cap L^p$ è denso in $L^p(E)$ per ogni E misurabile, $p \geq 1$ reale

DIMOSTRAZIONE

Basta osservare che $f \in L^p(E, \mathbb{R})$ estesa a 0 fuori da E appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ □

esercizio $Q = [0,1]^2$, $f \in L^2(Q, \mathcal{L}^d)$



$\}\frac{1}{n}$

$\forall n$ divido Q in n^2 cubetti disgiunti di lato $\frac{1}{n}$, Q_n^i

Definisco $\varphi_n = \sum_i \gamma_n^i \chi_{Q_n^i}$ dove $\gamma_n^i = \fint_{Q_n^i} f \, d\mathcal{L}^2$

Dimostrare che $\varphi_n \longrightarrow f$ in L^p per $p \geq 1$ e che non vale in generale se $p = +\infty$

Teorema di Lusin $D \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile secondo Lebesgue, $f: D \to \mathbb{R}$ misurabile.
Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon$ aperto t.c.
$\mathcal{L}^d(E_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f|_{D \setminus E_\varepsilon}$ è continua

Oss Dato che E_ε è aperto, $D \setminus E_\varepsilon$ è chiuso nella topologia di D
Se D è chiuso, possiamo applicare il seguente.

Teorema di Tietze Data $g: D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua, con D chiuso,
$\exists \tilde{g}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ estensione continua di g

Il teorema di Lusin sta dicendo che data $f: D \to \mathbb{R}$ misurabile
$\exists g_\varepsilon: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua t.c. $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{L}^d(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon$

Oss Nella dimostrazione del teorema mi posso limitare a esibire un insieme E_ε che sia solo misurabile.
Infatti, per la regolarità di $\mathcal{L}^d$, so che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon$ aperto t.c. $A_\varepsilon \supseteq E_\varepsilon$ e $\mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$
Quindi se f è continua su $D \setminus E_\varepsilon$, è anche continua su $D \setminus A_\varepsilon$
e $\mathcal{L}^d(A_\varepsilon) \leq \mathcal{L}^d(A_\varepsilon \setminus E_\varepsilon) + \mathcal{L}^d(E_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$

DIMOSTRAZIONE

caso 1: $\mathcal{L}^d(D) < +\infty$, $f \in L^1(D)$
$f \in L^1(D, \mathbb{R}) \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq C^0(D) \cap L^1$ t.c. $f_n \to f$ in $L^1(D)$
A meno di sottosuccessioni, posso supporre $f_n \to f$ q.o.
$\mathcal{L}^1(D) < +\infty$ permette di usare il teorema di Egorov:
fissato $\varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon$ con $\mathcal{L}^d(E_\varepsilon) < \varepsilon$ t.c. $f_n|_{D \setminus E_\varepsilon} \xrightarrow{U} f|_{D \setminus E_\varepsilon}$
$\Rightarrow f|_{D \setminus E_\varepsilon}$ è continua.

caso 2: $\mathcal{L}^d(D) < +\infty$, $f: D \to \mathbb{R}$ misurabile
Considero $\forall n \geq 1$ $F_n = \{x \in D : |f(x)| > n\}$ t.c. $F_n \searrow F = \{x \in D : |f(x)| = +\infty\}$ con $\mathcal{L}^d(F) = 0$
$F_1 \subseteq D$ e $\mathcal{L}^d(D) < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ t.c. $\mathcal{L}^d(F_n) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$
Definisco $G_\varepsilon = F_{n_\varepsilon}$ e dimostro il teorema su $D \setminus G_\varepsilon$
$f: D \setminus G_\varepsilon \to \mathbb{R}$ è misurabile e limitata, poiché $D \setminus G_\varepsilon = \{x \in D : |f(x)| \leq n_\varepsilon\}$
Applico quindi il caso 1: trovo $E_\varepsilon \subseteq D \setminus G_\varepsilon$ con $\mathcal{L}^d(E_\varepsilon) < \varepsilon$
e $f|_{(D \setminus G_\varepsilon) \setminus E_\varepsilon}$ continua
Chiamo $\tilde{E}_\varepsilon = G_\varepsilon \cup E_\varepsilon$ e ho $\mathcal{L}^d(\tilde{E}_\varepsilon) < 2\varepsilon$ e $f|_{D \setminus (G_\varepsilon \cup E_\varepsilon)}$ continua

caso 3: $\mathcal{L}^d(D) = +\infty$
$\forall n$ definisco $D_n = D \cap B_n$ e considero $f|_{D_n}$
Siamo nel caso 2: fissato $\varepsilon > 0$, $\exists E_n^\varepsilon$ t.c. $\mathcal{L}^d(E_n^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2^n}$
e $f|_{D_n \setminus E_n^\varepsilon}$ è continua
Definisco $E_\varepsilon = \bigcup_n E_n^\varepsilon$: $\mathcal{L}^d(E_\varepsilon) < \varepsilon$ e dico che $f|_{D \setminus \cup E_n^\varepsilon}$ è continua
Infatti se $x \in D \setminus \cup E_n^\varepsilon$, allora $x \in D_n \setminus \cup E_n^\varepsilon \subseteq D_n \setminus E_n^\varepsilon$ per n abbastanza grande
Si conclude osservando che $f|_{D_n \setminus E_n^\varepsilon}$ è continua e che $D_n \setminus E_\varepsilon$ è aperto in $D \setminus E_\varepsilon$. $\square$

separabilità

Def. B spazio di Banach è **separabile** sse contiene un insieme denso numerabile

<u>FATTO</u> $L^p(\mathbb{R}^d)$ è separabile se $1 \le p < +\infty$
ma $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ non è separabile

Lemma B spazio di Banach, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ famiglia di aperti t.c.
- $A_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha \in \mathcal{A}$
- $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \ \forall \alpha \neq \beta$
- $\mathcal{A}$ è più che numerabile

Allora B non è separabile.

DIMOSTRAZIONE
Per assurdo, sia $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ denso
Allora $\forall \alpha \ A_\alpha \cap D \neq \emptyset \Rightarrow \forall \alpha \ \exists k_\alpha$ t.c. $x_{k_\alpha} \in A_\alpha \cap D$
Inoltre se $\alpha \neq \beta$, $k_\alpha \neq k_\beta$, cioè k inietta $\mathcal{A}$ in D $\lightning$ $\square$

<u>$L^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile</u>:
consideriamo $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$, $\varphi_\alpha(x) = \varphi_0(x-\alpha)$
se $\alpha \neq \beta$, $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_{L^\infty} = 1$
Prendiamo $A_\alpha = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \|f - \varphi_\alpha\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}$
Perciò $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$ (per dis. triangolare)
A_α sono aperti non vuoti e $|\{A_\alpha\}| = |\mathbb{R}|$, quindi concludiamo per il lemma.

<u>$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ non è separabile</u>:
consideriamo $\{E_n\}$ famiglia numerabile di insiemi misurabili disgiunti in $\mathbb{R}^d$, con $|E_n| > 0$
Dato $J \subset \mathbb{N}$, pongo $f_J = \sum_{n \in J} \chi_{E_n}$
Dati $J \neq J'$, vale $f_J - f_{J'} = f_{J \setminus J'} - f_{J' \setminus J} \Rightarrow \|f_J - f_{J'}\|_{L^\infty} = 1$
Pongo $A_J = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \|f - f_J\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}$
Si conclude di nuovo per il lemma.

<u>$L^p(\mathbb{R}^d)$ è separabile</u> per $p < +\infty$:
Sia $\mathcal{R} = \{$cubi $\prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$
$D = \{$combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Q}$ di χ_R per $R \in \mathcal{R}\}$ $\Rightarrow |D| = |\mathbb{N}|$

Funzioni convesse su $\mathbb{R}^d$

Def. Dato $C \subseteq \mathbb{R}^d$ convesso, $f: C \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ si dice **convessa** se
$\forall x_1, \dots, x_n \in C$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Disuguaglianza di Jensen (I)

Sia $f: C \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa con $C \subseteq \mathbb{R}^d$ convesso.
Assumiamo che $\int_C x \, d\mu \in \mathbb{R}^d$ per μ misura di probabilità su C (sui boreliani di C).
Allora f è integrabile rispetto a μ su C e vale
$$f\left(\int_C x \, d\mu\right) \leq \int_C f(x) \, d\mu$$

Oss Nel caso $\mu = \lambda_1 \delta_{x_1} + \dots + \lambda_n \delta_{x_n}$, si ottiene la disuguaglianza di convessità

Disuguaglianza di Jensen (II)

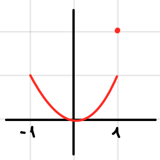
Sia $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa tale che $f(x) = \sup_{\substack{\Phi \leq f \\ \Phi \text{ affine}}} \Phi(x)$ (sci)

Allora $\forall \mu$ misura di probabilità su uno spazio mensurale X
$\forall u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ vale $f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu$
In particolare $f \circ u$ è integrabile rispetto a μ
in quanto $(f \circ u)^- \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$

DIMOSTRAZIONE

Sia Φ affine t.c. $f \geq \Phi$ su $\mathbb{R}^d$
$\Longrightarrow f(x) \geq \xi \cdot x + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
Fissata $u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, posso considerare $f \circ u$, $x = u(y)$, $y \in X$
$\Longrightarrow f \circ u(y) \geq \xi \cdot u(y) + b \quad \forall y \in X$
$-f \circ u(y) \leq -\xi \cdot u(y) - b \quad \forall y \in X$
$(f \circ u)^- = \max\{0, -f \circ u(y)\} \leq (-\xi \cdot u(y) - b)^+$
Integrando in μ:
$0 \leq \int_X (f \circ u)^- \, d\mu \leq \left| -\xi \cdot \int_X u(y) \, d\mu - b \right| \in \mathbb{R}$
Fisso una qualsiasi $\Phi: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ affine tale che $\Phi(x) \leq f(x)$
$\Longrightarrow \Phi \circ u(y) \leq f \circ u(y)$ su X
$\Phi\left(\int_X u(y) \, d\mu\right) = \int_X \Phi \circ u(y) \, d\mu \leq \int_X f \circ u(y) \, d\mu$
Passando al sup su Φ.
$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) = \sup_{\Phi} \Phi\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu \qquad \square$$

Oss Data $f: C \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa
non è detto che sia semicontinua inferiormente
(è sempre $C^0(\mathring{C})$ se è a valori finiti)



Oss Data $f: C \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa,
$\exists \tilde{f}: \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e $\tilde{f}|_C \equiv f$:
$\tilde{f} \equiv +\infty$ su $\mathbb{R}^d \setminus C$

CONVOLUZIONE

operatori lineari

DEF. Un operatore è una mappa $T:(X,\|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y,\|\cdot\|_Y)$, con X,Y spazi vettoriali normati su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Se $Y=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, si chiama funzionale
Inoltre T è lineare se $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall u,v\in X$

Teorema Sia T un operatore lineare.
Sono equivalenti le seguenti proprietà:
(i) T è continua su X;
(ii) T è continua in 0;
(iii) T è limitata, cioè $\exists C>0 : \|T(u)\|_Y \le C\|u\|_X \; \forall u\in X$;
(iv) T è Lipschitziana, cioè $\exists M>0 : \|T(u)-T(v)\|_Y \le M\|u-v\|_X \; \forall u,v\in X$.

DIMOSTRAZIONE
(i) $\Rightarrow$ (ii) chiaro
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Per assurdo, $\forall n>0 \; \exists u_n\in X : \|T(u_n)\|_Y > n\|u_n\|_X$
Si ha $\|u_n\|_X\ne 0$; sia $v_n=\frac{u_n}{n\|u_n\|_X}$
$T(v_n)=\frac{1}{n\|u_n\|_X}T(u_n) \Rightarrow \|T(v_n)\|_Y = \frac{1}{n\|u_n\|_X}\|T(u_n)\|_Y > 1$
ma $v_n \longrightarrow 0\in X$, poiché $\|v_n\|_X=\frac{1}{n}$ ↯
(iii) $\Rightarrow$ (iv) $T(u)-T(v)=T(u-v) \Rightarrow \|T(u)-T(v)\|_Y \le C\|u-v\|_X \quad \forall u,v\in X$
(iv) $\Rightarrow$ (i) chiaro: se $u_n\longrightarrow u$,
$\|T(u_n)-T(u)\|_Y \le C\|u_n-u\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ □

OSS (ii) $\Rightarrow$ (iii) Sia $C:=\sup_{u\in X, u\ne 0}\frac{\|T(u)\|_Y}{\|u\|_X}$: se $C<+\infty$, chiaramente $\|T(u)\|_Y\le C\|u\|_X$
Poiché T è continua in 0, $\exists\delta>0$ t.c. $\|v\|_X<\delta \Rightarrow \|T(v)\|_Y<1$
Dato $w\in X$, sia $w'=\frac{\delta}{2\|w\|_X}w$, per cui vale $\|w'\|_X=\frac{\delta}{2}$
Quindi $1>\|T(w')\|_Y=\frac{\delta}{2\|w\|_X}\|T(w)\|_Y \Rightarrow \sup\frac{\|T(w)\|_Y}{\|w\|_X}\le\frac{2}{\delta}<+\infty$ □

esempio $T(x)=\begin{cases}0 & \text{se } \|x\|_X<1\\ 1 & \text{se } \|x\|_X\ge 1\end{cases}$ soddisfa (ii) e (iii) ma non (i) (non è lineare)

convoluzione

DEF. Siano $f,g:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ misurabili,
dove consideriamo su $\mathbb{R}^d$ la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^d$
Definiamo la convoluzione tra f e g $f*g:\mathbb{R}^d\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ t.c.
$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy \quad \text{per q.o. } x\in\mathbb{R}^d$$

Quando ha senso $f*g(x)$?
Se $f,g\ge 0$, allora $f*g(x)\in[0,+\infty]$ ha sempre senso
Oppure se $|f|*|g|(x)<+\infty$ (ben definita), allora anche $f*g(x)$ ha senso
Infatti $\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)\,|g|(y)\,dy<+\infty \Rightarrow$ per x fissato, $y\longmapsto f(x-y)g(y)$ è in $L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$
$\Rightarrow$ anche $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$ ha senso

Vorremmo
- $f*g$ definito q.o. $x\in\mathbb{R}^d$
- $f*g$ con proprietà di sommabilità

Oss Se la convoluzione è ben definita, vale $f*g=g*f$

esempio Trovare f,g t.c. $f*g$ non abbia senso

Teorema Sia $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$, allora $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ e vale $\|f*g\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.

DIMOSTRAZIONE

- Se $p=+\infty$

$|f|*|g|(x)=\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)|g|(y)\,dy\leq\|g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)\,dy=\|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^\infty}\ \forall x\in\mathbb{R}^d$

Basta usare che $|f*g(x)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\,dy\right|\leq\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\,dy=|f|*|g|(x)<+\infty$

$\Longrightarrow\ \|f*g\|_{L^\infty}\leq\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}$

Sia ora $p\geq 1$ reale

Claim: $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)|g|(y)\,dy\right)^p dx<+\infty$

- Se $p=1$, le maggiorazioni sono immediate

$\||f|*|g|\|_{L^1}=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,dy\,dx\overset{FT}{=}\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,dx\,dy=\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$

$\Longrightarrow\ |f|*|g|(x)<+\infty$ $\mathcal{L}^d$-q.o. $x\in\mathbb{R}^d$ e $\|f*g\|_{L^1}\leq\||f|*|g|\|_{L^1}$

- Se $p\neq 1$, sia $q=\frac{p}{p-1}$ il suo esponente coniugato

Posso fare le stime con $|f|$ e $|g|$, poiché $\|f*g\|_{L^p}\leq\||f|*|g|\|_{L^p}$

$\||f|*|g|\|_{L^p}^p=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)|g|(y)\,dy\right)^p dx$

Ora $|f|(x-y)=|f|^{\frac1p+\frac1q}(x-y)=|f|^{\frac1p}(x-y)\cdot|f|^{\frac1q}(x-y)$

$|f|*|g|(x)=\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{\frac1q}(x-y)\cdot|f|^{\frac1p}(x-y)|g|(y)\,dy\overset{H}{\leq}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{\frac1q\cdot q}(x-y)\,dy\right)^{\frac1q}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(|f|^{\frac1p}(x-y)|g|(y))^p dy\right)^{\frac1p}$

$(|f|*|g|)^p(x)\leq\|f\|_{L^1}^{p/q}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)|g|^p(y)\,dy\right)$

$\int_{\mathbb{R}^d}(|f|*|g|)^p(x)\,dx\leq\|f\|_{L^1}^{p/q}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)|g|^p(y)\,dy\,dx\overset{FT}{=}$

$=\|f\|_{L^1}^{p/q}\int_{\mathbb{R}^d}|g|^p(y)\int_{\mathbb{R}^d}|f|(x-y)\,dx\,dy=\|f\|_{L^1}^{p/q+1}\|g\|_{L^p}^p$

$\Longrightarrow\ \||f|*|g|\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}(|f|*|g|)^p(x)\,dx\right)^{\frac1p}\leq\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$ $\square$

corollario Se fisso $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$,
$T_f^p: L^p(\mathbb{R}^d)\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$, data da $T_f^p(g)(x)=f*g(x)$,
è ben definita, lineare e continua.

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema $f*g\in L^p$.

La linearità segue dalla buona definizione e dalla linearità dell'integrale

Per il teorema, T_f^p è limitata, quindi continua

$\|T_f^p(g)\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$ $\square$

corollario Se fisso $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$,
$S_g: L^1(\mathbb{R}^d)\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$, data da $S_g(f)(x)=f*g(x)$,
è ben definita, lineare e continua

Teorema Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, allora $f*g$ è ben definita, $f*g \in L^\infty$ e vale $\|f*g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

DIMOSTRAZIONE

Considero $|f|$ e $|g|$

$$|f| * |g|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f|(x-y)|g|(y)dy \overset{H}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p(x-y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g|^q(y)dy\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

□

In realtà, vale un risultato più generale.

Teorema di Young Siano $p,q,r \in [1,+\infty]$ t.c. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, allora $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ e vale $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Def. $L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile t.c. $\forall K \subseteq \Omega$ compatto, $f \in L^p(K)\}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.

<u>Oss</u> (1) $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \quad \forall p$

(2) $L^p_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \quad \forall p$

Infatti, dato $K \subseteq \Omega$ compatto, vale

$$\int_K |f| d\mu = \int_\Omega |f \chi_K| d\mu \overset{H}{\leq} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\chi_K|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p} (\mu(K))^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

Def. Data f, si definisce $\operatorname{spt} f = A^c$, dove A è il più grande aperto t.c. $f=0$ per μ-q.o. $x \in A$ (misura σ-finita)

Teorema Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, allora $f*g$ è ben definita.

DIMOSTRAZIONE

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_K \underbrace{f(x-y)}_{L^1(K)}\underbrace{g(y)}_{L^\infty(K)}dy \text{ è ben definito}$$

□

Teorema Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e $g \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$, allora $f*g$ è continua su $\mathbb{R}^d$.

DIMOSTRAZIONE

$g \in C^0_c(\mathbb{R}^d) \Rightarrow g \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, quindi $f*g$ è ben definito

Sia $K = \text{supp}\, g$

$f*g$ è anche $C^0(\mathbb{R}^d)$

Infatti, presa $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^d$

$f*g(x_n) = \int_K f(x_n-y)g(y)\,dy \underset{z=x_n-y}{=} \int_{x_n-K} f(z)g(x_n-z)\,dz = \int_{\tilde{K}} f(z)g(x_n-z)\,dz$

Se $x_n \to x$, $\exists \tilde{K} \supseteq x_n - K \ \forall n$

Uso il teorema di Lebesgue con $f_n(z) = f(z)g(x_n-z) \longrightarrow f(z)g(x-z)$ (g continua)

e $f_n \in L^1(\tilde{K})$, $|f_n| \leq |f(z)|\, \|g\|_{L^\infty}$ $\qquad |f| \in L^1(\tilde{K})$

Quindi passo al limite nell'integrale. $\square$

A livello formale, $C^0_0(\mathbb{R}^d) = \overline{C^0_c(\mathbb{R}^d)}$ rispetto alla convergenza uniforme come sottospazi di $C^0(\mathbb{R}^d) \cap L_{lim}(\mathbb{R}^d)$

Proposizione Sia $p \in [1,+\infty)$ e sia $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$
$\forall \tau \in \mathbb{R}^d$ definisco $\tau(f)(y) = f(y+\tau) \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Allora si ha che $\lim_{\tau\to 0} \|\tau(f) - f\|_{L^p} = 0$
(la traslazione è continua in L^p).

DIMOSTRAZIONE

Uso la densità delle $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ in L^p

<u>Passo 1</u> Dimostro il risultato per $f \in C^0_c$

Considero $\|f - \tau(f)\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) - f(y+\tau)|^p\,dy = \int_{K\cup(K-\tau)} |f(y) - f(y+\tau)|^p\,dy$

Dico che $\lim_{\tau\to 0} \int_{K\cup(K-\tau)} |f(y) - f(y+\tau)|^p\,dy = 0$

per Lebesgue: $|f(y) - f(y+\tau)|^p \leq 2\|f\|^p_\infty$ ($K\cup(K-\tau)$ è compatto)

e $\lim_{\tau\to 0} f(y+\tau) \to f(y)$ perché f è continua

altrimenti uso l'uniforme continuità di f,

per cui se $|\tau| < \delta_\varepsilon$, allora $\int_{K\cup(K-\tau)} |f(y) - f(y+\tau)|^p\,dy \leq \varepsilon^p \mathcal{L}^d(K\cup(K-\tau)) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$

<u>Passo 2</u> Estendo il risultato per f qualsiasi

Fisso $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists g_\varepsilon \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$ t.c. $\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$

$\|f - \tau(f)\|_{L^p} \leq \|f - g + g - \tau(g) + \tau(g) - \tau(f)\|_{L^p} \leq \underbrace{\|f-g\|_{L^p}}_{(I)} + \underbrace{\|g - \tau(g)\|_{L^p}}_{(II)} + \underbrace{\|\tau(g) - \tau(f)\|_{L^p}}_{(III)} < 3\varepsilon$

(I) $\leq \varepsilon$

(III) $\|\tau(g) - \tau(f)\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y+\tau) - f(y+\tau)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|g - f\|_{L^p} \leq \varepsilon$

(II) Per il punto 1, $\lim_{\tau\to 0} \|g - \tau(g)\|_{L^p} = 0$

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon$: se $|\tau| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|g - \tau(g)\|_{L^p} < \varepsilon$ $\square$

Oss $\|f-\tau(f)\|_{L^\infty} \not\longrightarrow 0$ se $|\tau| \longrightarrow 0$

esempio Per $d=1$, basta considerare $f(x)=\chi_{[0,+\infty)}$

Infatti $\|f-\tau(f)\|_{L^\infty}=1 \quad \forall \tau \neq 0$

> **Proposizione** Siano $p,q\in[1,+\infty]$ t.c. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
> Se $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$, allora $f*g\in L^\infty \cap C^0(\mathbb{R}^d)$
> e $f*g$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^d$.
> Se $p,q>1$, allora $f*g\in C^0_0(\mathbb{R}^d)$.

DIMOSTRAZIONE

- La mappa $x \longmapsto f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f\,\tau_x\tilde{g}\,dy$ può essere vista come composizione $x \overset{\tau_x}{\longmapsto} \tau_x\tilde{g} \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\,\tau_x\tilde{g}\,dy$

  continua se $q\neq+\infty$ (altrimenti si scambia per simmetria) — lineare e limitata, quindi continua

- $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta_\varepsilon$ t.c. $\forall x,z \ |x-z|<\delta \implies |f*g(x)-f*g(z)|<\varepsilon$

  Fissiamo $\varepsilon>0$. Valutiamo l'oscillazione, fissati $x,z\in\mathbb{R}^d$

  $|f*g(x)-f*g(z)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(z-y)g(y)\,dy\right| \leq$

  $\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(z-y)|\,|g(y)|\,dy \underset{H}{\leq} \|f(x-\cdot)-f(z-\cdot)\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

  Si conclude utilizzando il risultato di continuità delle traslazioni in L^p

  $|f*g(x)-f*g(z)| \leq \|f(x-\cdot)-f(z-\cdot)\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

  $\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\underbrace{f(x-y)}_{=h(y)} - \underbrace{f(z-y)}_{=h(z-x+y)}|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \|h-(z-x)(h)\|_{L^p} \xrightarrow[z-x\to 0]{} 0$

  Quindi $\|h-(z-x)(h)\|_{L^p}<\varepsilon$ per $|x-z|<\delta$

  $\implies |f*g(x)-f*g(z)| \leq \varepsilon\|g\|_{L^q}$ per $|x-z|<\delta$

  Questo funziona anche per $p=+\infty, q=1$, scambiando il ruolo di f e g.

- Se $p,q>1$ (cioè p,q reali), si dimostra per densità

  <u>Passo 1</u> $f,g\in C^0_c(\mathbb{R}^d)$

  $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{spt(g)} f(x-y)g(y)\,dy$

  o $x-y\in spt(f)$ o $f(x-y)=0$

  $f*g(x)\neq 0 \implies x\in spt(f)+spt(g)$ compatto

  $\implies f*g\in C^0_c(\mathbb{R}^d)$

  <u>Passo 2</u>

  Fissiamo $f\in L^p, g\in L^q$ e fissiamo $(f_\varepsilon,g_\varepsilon)\in C^0_c\times C^0_c$

  $\|f*g(x)-f_\varepsilon*g_\varepsilon(x)\|_{L^\infty} = \|(f-f_\varepsilon)*(g-g_\varepsilon)+(f-f_\varepsilon)*g_\varepsilon+f_\varepsilon*(g-g_\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq$

  $\leq \|f-f_\varepsilon\|_{L^p}\|g-g_\varepsilon\|_{L^q} + \|f-f_\varepsilon\|_{L^p}\|g_\varepsilon\|_{L^q} + \|f_\varepsilon\|_{L^p}\|g-g_\varepsilon\|_{L^q}$

  Fisso $\varepsilon>0$, scelgo $f_\varepsilon\in C^0_c$ t.c. $\|f-f_\varepsilon\|_{L^p}<\varepsilon \implies \|f_\varepsilon\|_{L^p}\leq \varepsilon+\|f\|_{L^p}$

  $g_\varepsilon\in C^0_c$ t.c. $\|g-g_\varepsilon\|_{L^q}<\varepsilon \implies \|g_\varepsilon\|_{L^q}\leq\varepsilon+\|g\|_{L^q}$ □

Oss L'ultima parte è falsa se $p=+\infty$ o $q=+\infty$

esempio Se $p=+\infty, q=1$, consideriamo $f\equiv 1\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\forall g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ fissata, vale $f*g(x)\equiv\int_{\mathbb{R}^d} g(y)dy\in\mathbb{R}$,

quindi $f*g \not\longrightarrow 0$ per $|x|\to+\infty$, se $\int_{\mathbb{R}^d} g(y)dy\neq 0$

Quando è derivabile $f*g$? Come si scrive $(f*g)'$?

Il primo risultato di continuità per $f*g$ è stato
$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g\in C^0_c(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f*g$ ben definito e C^0
dove $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)=\{f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ misurabile t.c. $\forall K$ compatto $f\in L^p(K)\}$

Proposizione Sia $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g\in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ con $k\geq 0$.
Allora $f*g\in C^k(\mathbb{R}^d)$ e vale
$\forall i=1,\dots,d \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)=f*\frac{\partial g}{\partial x_i}$
$\forall \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ multiindice con $|\alpha|\leq k$, si ha
$D^\alpha(f*g)=f*D^\alpha g$.

DIMOSTRAZIONE

Osservo che basta dimostrare che le derivate parziali verificano $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)=f*\frac{\partial g}{\partial x_i}$
(infatti $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}\in C^0_c(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f*\frac{\partial g}{\partial x_i}\in C^0(\mathbb{R}^d)$
Per il teorema del differenziale totale, $f*g\in C^1(\mathbb{R}^d)$
Il resto segue per induzione.
Devo calcolare per x fissato e $i\in\{1,\dots,d\}$ fissato

$$\lim_{t\to 0}\frac{f*g(x+te_i)-f*g(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\underbrace{\frac{g(x+te_i-y)-g(x-y)}{t}}_{\downarrow\ \frac{\partial g}{\partial x_i}(x-y)}\,dy$$

Poiché vale
$$|f(y)|\left|\frac{g(x+te_i-y)-g(x-y)}{t}\right|=|f(y)|\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi_t)\right|\leq|f(y)|\,\|\nabla g\|_\infty$$
si può applicare Lebesgue $\square$

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ spazio misurabile,
$I=(a,b)$ intervallo anche illimitato, $E\in\mathcal{A}$.
Sia $f:I\times E\to\mathbb{R}$ tale che
(i) $\forall t\in I \quad x\longmapsto f(t,x)\in L^1(E)$
(ii) per μ-q.o. $x\in E \quad f(\cdot,x)\in C^1(I)$
(iii) $\exists g\in L^1(E,\mu)$ tale che $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\leq g(x)$ $\forall t\in I$, μ-q.o. $x\in E$
Allora $\varphi:I\to\mathbb{R}$ data da $\varphi(t)=\int_E f(t,x)\,d\mu$ è ben definita, di classe $C^1(I)$ e vale $\varphi'(t)=\int_E\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu$.

<u>Oss</u> Visto ad Analisi I che
$h:[a,b]\to\mathbb{R}$ è $C^1 \Longleftrightarrow \exists\psi\in C^0([a,b])$ t.c. $h(t)-h(s)=\int_s^t\psi(z)\,dz \quad \forall s,t\in[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

Per (i), φ è ben definita

Per (ii), $\forall t,s$ fissati, μ-q.o. x $\quad f(t,x)-f(s,x)=\int_s^t \frac{\partial f}{\partial t}(z,x)\,dz$

Integro su E rispetto a μ

Devo far vedere che $\frac{\partial f}{\partial t}\in L^1([t,s]\times E)$

ma per (iii) $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\le g(x)\in L^1(E)$

$\int_s^t\int_E \left|\frac{\partial f}{\partial t}(z,x)\right|d\mu dz \le \int_s^t\int_E g(x)\,d\mu dz \le |t-s|\,\|g\|_{L^1(E,\mu)}$

Quindi

$$\underbrace{\int_E f(t,x)-f(s,x)}_{\varphi(t)-\varphi(s)}=\int_E\int_s^t \frac{\partial f}{\partial t}(z,x)\,dz\,d\mu \overset{FT}{=} \int_s^t \underbrace{\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(z,x)\,d\mu}_{\psi(z)}\,dz$$

$\psi\in C^0(I)$ per il Teorema di Lebesgue

Per μ-q.o. x $\quad z\longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(z,x)$ è continua

$\forall z\in(s,t)$ $\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(z,x)\right|\le g(x)\in L^1(E,\mu)$

$\Rightarrow$ il limite in z passa dentro $\int_E \dots$ $\square$

Come si formula il risultato di prima se $g\in C^k$, ma non a supporto compatto?
Bisogna imporre qualche ulteriore condizione sulla sommabilità di f e g.

Proposizione Sia $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g\in C^1\cap L^p$, allora $f*g$ è derivabile se $\frac{\partial}{\partial x_i}g\in L^p$ $\forall i$, e vale $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)=f*\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Proposizione Sia $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g\in C^1\cap L^q(\mathbb{R}^d)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ allora $f*g\in C^1$ e vale $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)=f*\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Oss Siano f,g t.c. $f*g$ è ben definita

Se $F=\{x\in\mathbb{R}^d : |f(x)|>0\}$, $G=\{x\in\mathbb{R}^d : |g(x)|>0\}$, $H=\{x\in\mathbb{R}^d : |f*g(x)|>0\}$,

allora $H\subseteq F+G$, cioè $\operatorname{supp} f*g\subseteq \operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$

Infatti, se $t\notin F+G$, o $y\in F$ e $t-y\notin G$, o $y\notin F$; in ogni caso $f*g(t)=0\Rightarrow t\notin H$.

Lemma Se $E,F\subseteq\mathbb{R}^d$ sono misurabili con $|E|,|F|>0$, allora $\operatorname{int}(E+F)\neq\emptyset$.

DIMOSTRAZIONE

Wlog $|E|,|F|<+\infty$. Considero $\chi_E*\chi_F$: è t.c.

$\|\chi_E*\chi_F\|_{L^1}=|E||F|$ e $\chi_E*\chi_F$ continua

Poiché $\exists x: \chi_E*\chi_F(x)>0$, c'è un intero intorno e $\operatorname{supp}(\chi_E*\chi_F)\subseteq E+F$ $\square$

Corollario Se A è misurabile con $|A|>0$, allora $A-A$ è un intorno di 0.

DIMOSTRAZIONE

Basta considerare $E=A$, $F=-A$: $\chi_A*\chi_{-A}(0)=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_A(y)\chi_{-A}(-y)\,dy=|A|$ $\square$

Mollificatori

I mollificatori sono particolari "nuclei di convoluzione", ottenuti riscalando una stessa funzione.

Sia $h \in L^1(\mathbb{R}^d, [0,1]) \setminus \{0\}$

Si considerino le riscalate per $\varepsilon > 0$ $\quad h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Questo riscalamento assicura che $\int_{\mathbb{R}^d} h = \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon := c > 0$.

Se prendiamo $h \in C^\infty_c$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty)$

$$\underset{\substack{\cap \\ C^\infty}}{f_\varepsilon = \frac{1}{c} f * h_\varepsilon} \longrightarrow f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

<u>Oss</u> Se prendo $\varphi \in L^1([a,b])$ ma non C^0

$f(t) = \int_a^t \varphi(s)\,ds$ (anche se $a = -\infty$)

è una buona definizione, f è continua ma non è detto che f sia derivabile ovunque.

esempio $|x| = c + \int_0^x \varphi(s)\,ds$ dove $\varphi(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s > 0 \\ -1 & \text{se } s < 0 \end{cases}$

Def. Un mollificatore è una funzione $\rho_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho_n \geq 0$, $\text{supp}(\rho_n) \subseteq B(0, r_n)$ con $r_n \longrightarrow 0$ e $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n\,dx = 1$.

> **Teorema** Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $p \in [1, +\infty)$, e ρ_n t.c.
> $\rho_n \geq 0$, $\text{supp}(\rho_n) \subseteq B(0, r_n)$ con $r_n \to 0$ e $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n\,dx = 1$, allora
> $$\rho_n * f \longrightarrow f \text{ in } L^p$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo

$$|\rho_n * f(x) - f(x)|^p = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) f(x-y)\,dx - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\,dy \right|^p =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) (f(x-y) - f(x))\,dy \right|^p \overset{\text{Jensen}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p\,dy$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_n * f(x) - f(x)|^p\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p\,dy\,dx \overset{FT}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y f(x) - f(x)|^p\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|^p_{L^p} \rho_n(y)\,dy$$

Ora $\forall \varepsilon\ \exists \delta : |y| < \delta \Rightarrow \|\tau_y f - f\|^p_{L^p} < \varepsilon$. Scegliendo $\bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ $r_n < \delta$, si ha

$$\|\rho_n * f - f\|^p_{L^p} \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\,dy = \varepsilon$$

$\square$

<u>Oss</u> Spesso si considera $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ con $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$, $\text{supp}\,\rho \subseteq B_1(0)$.

> **Proposizione** Se ρ_n sono t.c. $\rho_n \geq 0$, $\text{supp}(\rho_n) \subseteq B(0, r_n)$ con $r_n \to 0$,
> $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n\,dx = 1$, e $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f \in L^p$ $\forall i = 1, \ldots, d$, allora
> $$\rho_n * f \in C^1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_n * f = \rho_n * \frac{\partial}{\partial x_i} f$$
> Inoltre $\frac{\partial}{\partial x_i} \rho_n * f \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} f$ in L^p.

> **Proposizione** Se ρ_n sono mollificatori e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, allora
> $$\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \rho_n\right) * f.$$
> Più in generale, $D^\alpha(\rho_n * f) = (D^\alpha \rho_n) * f$.

SPAZI DI HILBERT

Def. Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
$\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice prodotto interno
(prodotto scalare se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, prodotto hermitiano se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) se
(i) $\forall y\in H$ $\quad x\longmapsto \langle x,y\rangle$ è lineare su H
(ii) $\forall x,y\in H$ $\quad \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
(iii) $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}^+$ $\forall x\in H$ e $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$

Def. Definisco $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $\quad\forall x\in H$

$\|\;\|$ è una norma: per (iii) è ben definito e $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$
$\|\lambda x\|=\sqrt{\langle\lambda x,\lambda x\rangle} =\sqrt{\lambda\bar\lambda\langle x,x\rangle} =\sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle} =|\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle}=|\lambda|\|x\|$
(CS) implica la disuguaglianza triangolare

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.	$\forall x,y\in H$ si ha $\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$.

La $\|\cdot\|$ indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ha l'ulteriore proprietà:
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2 \qquad \text{(P)}$$

Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, vale l'identità di polarizzazione:
$$\langle v,w\rangle = \frac14\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2+i\|v+iw\|^2-i\|v-iw\|^2\right)$$

Conseguenza:
$\forall y\in H$ possiamo considerare $T_y : H\longrightarrow\mathbb{K}$ definito da
$$T_y(x)=\langle x,y\rangle \quad \forall x\in H$$
T_y è lineare e continua rispetto alla topologia indotta da $\|\cdot\|$
Infatti $\quad |T_y(x)|=|\langle x,y\rangle|\le\|y\|\,\|x\| \quad \forall x\in H$

Inoltre, fissato $M\subseteq H, M\neq\emptyset$, si può definire
$$M^\perp=\{y\in H : \langle x,y\rangle=0 \ \forall x\in M\}$$
$\Rightarrow M^\perp$ è un sottospazio chiuso di H
Infatti $\quad M^\perp=\bigcap_{x\in M}\{x\}^\perp=\bigcap_{x\in M}T_x^{-1}(0)=\bigcap_{x\in M}\operatorname{Ker}T_x$

Def. Sia H spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Se la norma $\|\cdot\|$ indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una metrica d
che rende (H,d) uno spazio metrico completo,
H si dice spazio di Hilbert.

Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Sia H spazio di Hilbert e sia $C \subseteq H$ chiuso convesso, $C \neq \emptyset$. Allora $\forall x \in H \ \exists! \ \bar{x} \in C$ tale che $\|x-\bar{x}\| = \min_{w \in C} \|x-w\|$.

DIMOSTRAZIONE

<u>UNICITA'</u>: fisso $x \in H$, siano $x_1, x_2 \in C$ tali che

$$\|x-x_1\| = \min_{w\in C} \|x-w\| = \|x-x_2\| =: d$$

<u>Oss</u> In particolare ogni punto del tipo $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ è ancora minimizzante

Infatti $\|x-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\| = \|\lambda(x-x_1)+(1-\lambda)(x-x_2)\| \leq \lambda\|x-x_1\| + (1-\lambda)\|x-x_2\| = \min_{w\in C}\|x-w\|$

(la norma indotta dal prodotto interno è strettamente convessa)

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2$$

$$\|x_1-x_2\|^2 = 2\|x-x_1\|^2 + 2\|x-x_2\|^2 - 4\left\|\frac{x-x_1}{2} + \frac{x-x_2}{2}\right\|^2$$

$$\Longrightarrow \|x_1-x_2\|^2 = 4d^2 - 4\|x - \underbrace{\frac{x_1+x_2}{2}}_{\in C}\|^2 \leq 0$$

<u>ESISTENZA</u>: si costruisce una successione di Cauchy

Sia $(w_n) \subset C$ t.c. $d = \inf_{w\in C}\|x-w\| = \lim_{n\to+\infty}\|x-w_n\| \in \mathbb{R}$

Mostriamo che w_n è di Cauchy

$$\|w_n-w_m\|^2 = 2\|x-w_n\|^2 + 2\|x-w_m\|^2 - 4\left\|\frac{x-w_n}{2} + \frac{x-w_m}{2}\right\|^2 =$$

$$= 2\underbrace{\|x-w_n\|^2}_{\downarrow\, d^2} + 2\underbrace{\|x-w_m\|^2}_{\downarrow\, d^2} - 4\underbrace{\left\|x - \frac{w_n+w_m}{2}\right\|^2}_{\geq d^2}$$

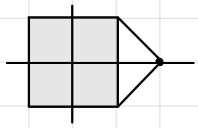
$$\Longrightarrow \|w_n-w_m\|^2 \leq 2(\|x-w_m\|^2 + \|x-w_m\|^2) - 4d^2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow (w_n)$ è di Cauchy.

Poiché H è completo, $\exists\, \bar{x} = \lim_{n\to+\infty} w_n$.

Poiché C è chiuso, $\bar{x} \in C$. $\square$

<u>Oss</u>
- l'ipotesi di chiusura è necessaria
  esempio $(\mathbb{R}^2, d_E)$ $\quad C = B_1(0)$
- l'ipotesi di $\|\cdot\|$ indotta da prodotto interno assicura l'unicità
  esempio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$



Dato C convesso chiuso in H Hilbert.

La proiezione su C π_C è caratterizzata da

$$\langle x-\pi_C(x), w-\pi_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall w \in C$$

Versione complessa della disuguaglianza caratterizzante:

$$2\mathrm{Re}(\langle x-\pi_C(x), w-\pi_C(x)\rangle) \leq 0 \quad \forall w \in C$$

<u>Idea</u>: $\phi(t) = \|x-[(1-t)\pi_C(x)+tw]\|^2 \quad t\in[0,1],\ w\in C$

$\phi'(0) \geq 0$

$\Phi: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su $[a,b]$, Φ con minimo in a

$\Longrightarrow \Phi'(a) \geq 0$

Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso

Sia M sottospazio chiuso di H spazio di Hilbert.
Allora $\exists ! \, P, Q : H \longrightarrow H$ lineari e continui tali che $P(x) = \pi_M(x)$ e vale $\forall x \in H$ $x = P(x) + Q(x)$ e $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$
In particolare, $P : H \longrightarrow M$, $Q : H \longrightarrow M^\perp$ e la scrittura è unica.

DIMOSTRAZIONE

Definisco $P(x) = \pi_M(x)$ (M è un convesso chiuso non vuoto)
e definisco $Q(x) = x - P(x)$
Dimostro che $x - P(x) \in M^\perp$, ossia $\langle x - P(x), w \rangle = 0 \ \forall w \in M$.
Fisso $w \in M$.

$$\|x - P(x)\|^2 \leq \|x - P(x) + \lambda w\|^2 \quad \forall w \in M, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$= \langle x - P(x) + \lambda w, x - P(x) + \lambda w \rangle = \|x - P(x)\|^2 + 2 \mathrm{Re}\, \bar{\lambda} \langle x - P(x), w \rangle + |\lambda|^2 \|w\|^2$$

Quindi $\forall \lambda$ deve essere
$$|\lambda|^2 \|w\|^2 + 2 \mathrm{Re}\, \bar{\lambda} \langle x - P(x), w \rangle \geq 0$$
Se $\langle x - P(x), w \rangle = 0$, ho finito
Se $\langle x - P(x), w \rangle \neq 0$, scelgo $\lambda = t \langle x - P(x), w \rangle$, $t \in \mathbb{R}$
$$t^2 |\langle x - P(x), w \rangle|^2 \|w\|^2 + 2 \mathrm{Re}\, t \, |\langle x - P(x), w \rangle|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow |\langle x - P(x), w \rangle| = 0 \Longrightarrow \langle x - P(x), w \rangle = 0$$
Osservo che $M \cap M^\perp = \{0\} \Longrightarrow$ se $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$,
allora $x_1 = \pi_M(x)$ e $x_2 = \pi_{M^\perp}(x)$
Quindi, se $x = P(x) + Q(x) = x_1 + x_2 \Longrightarrow \underbrace{P(x) - x_1}_{\in M} = \underbrace{x_2 - Q(x)}_{\in M^\perp}$
$$\Longrightarrow P(x) = x_1, \ Q(x) = x_2$$
$\Longrightarrow P$ e Q sono lineari:
Presi x e z, devo mostrare che $P(x+z) = P(x) + P(z)$, $Q(x+z) = Q(x) + Q(z)$
$$P(x) + Q(x) + P(z) + Q(z) = x + z = P(x+z) + Q(x+z)$$
$$\Longrightarrow P(x+z) = P(x) + P(z), \ Q(x+z) = Q(x) + Q(z)$$
Fissati $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda(P(x) + Q(x)) = \lambda x = P(\lambda x) + Q(\lambda x) \Longrightarrow P(\lambda x) = \lambda P(x), \ Q(\lambda x) = \lambda Q(x)$$
Faccio il conto:
$$\|x\|^2 = \|P(x) + Q(x)\|^2 = \langle P(x) + Q(x), P(x) + Q(x) \rangle = \|P(x)\|^2 + \underbrace{\langle P(x), Q(x) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle Q(x), P(x) \rangle}_{=0} + \|Q(x)\|^2$$
$\Longrightarrow \|P(x)\| \leq \|x\|$, $\|Q(x)\| \leq \|x\|$, cioè P, Q sono limitati.
Poiché P, Q sono lineari, sono continue. $\square$

corollario Dato $M \subseteq H$ sottospazio chiuso, vale $H = M \oplus M^\perp$.

Oss Dato M sottospazio chiuso, proprio, non vuoto, allora $M^\perp \neq \{0\}$
Infatti $M \subsetneq H \Longrightarrow \exists x \in H \setminus M$
$$\Longrightarrow \exists \, \pi_M(x) \neq x \Longrightarrow x - \pi_M(x) \in M^\perp$$

Teorema di rappresentazione di Riesz Dato $T: H \to \mathbb{K}$ lineare e continuo $\exists ! y \in H$ tale che $T(x) = T_y(x) := \langle x, y \rangle \ \forall x \in H$.

DIMOSTRAZIONE

Se $T \equiv 0$, allora $y = 0$.

Sia $T \not\equiv 0$, considero $M = \operatorname{Ker} T$ sottospazio chiuso poiché T è continuo

Osservo che $\operatorname{Ker} T$ ha codim 1 in H, cioè

$H = \operatorname{Ker} T \oplus (\operatorname{Ker} T)^\perp$ e $\dim_{\mathbb{K}} (\operatorname{Ker}(T))^\perp = 1$

Infatti, dati $x_1 \neq x_2 \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$ t.c. $T(x_1) = \lambda_1 \neq 0$, $T(x_2) = \lambda_2 \neq 0$,

allora $T(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2) = 0 \implies \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 \in \operatorname{Ker} T \implies \lambda_2 x_1 = \lambda_1 x_2$

quindi $x_2 \in \operatorname{Span}(x_1)$

Fisso $w \in (\operatorname{Ker} T)^\perp \setminus \{0\}$ e cerco $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $T(x) = T_{\lambda w}(x) = \langle x, \lambda w \rangle$

$T(w) = \langle w, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \|w\|^2 \implies \lambda = \overline{\dfrac{T(w)}{\|w\|^2}}$

Dico che $y = \overline{\dfrac{T(w)}{\|w\|^2}}\, w$ è il vettore cercato

Infatti

$$T_y(x) = \langle x, y \rangle = \frac{T(w)}{\|w\|^2} \langle x, w \rangle \underset{x = \pi_{\operatorname{Ker} T}(x) + \mu w}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{T(w)}{\|w\|^2} \langle \mu w, w \rangle = T(\mu w) = T(x)$$

$\square$

corollario Dato H Hilbert,

$\{T : H \to \mathbb{K} \text{ lineari e continue}\} \simeq H$.

<u>esempio</u> $H = \ell^2(\mathbb{K}) = \{x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \in \mathbb{K} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty\}$

ℓ_2 è Hilbert con $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \bar{y}_n$

Guardiamolo meglio:

$e_i = (0, \_, 0, \underset{i}{1}, 0, \_) \in \ell_2$

Che nozione di base abbiamo su uno spazio di Hilbert di dim infinita?

Abbiamo la nozione di base algebrica

$B = \{\xi_j : \xi_j \in H, j \in J\}$ è base algebrica se

$\operatorname{Span} B = H$ e B è linearmente indipendente

Ma $(0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in \ell^2 \setminus \operatorname{Span}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$, ma $\in \overline{\operatorname{Span}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}}$

suggerisce una nuova nozione di base

Sistemi ortonormali

Def. Sia H spazio di Hilbert
$\{e_i\}_{i\in I}$ si dice **sistema ortonormale** se
$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij} \quad \forall i,j\in I$$
$\{e_i\}_{i\in I}$ si dice **sistema ortogonale** se
$$\langle e_i,e_j\rangle=0 \quad \forall i\neq j$$

Disuguaglianza di Bessel Sia $\{e_i\}_{i\in I}$ sistema ortonormale in H. Allora $\forall J\subseteq I$ finito vale
$$\sum_{i\in J}|\langle x,e_i\rangle|^2\le\|x\|^2 \quad \forall x\in H.$$
Inoltre $\sup_{J\subseteq I}\sum_{i\in J}|\langle x,e_i\rangle|^2\le\|x\|^2 \quad \forall x\in H.$

DIMOSTRAZIONE

Faccio il calcolo di $\|x-\sum_{i\in J}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2$, con J finito
A meno di riordinare gli indici, posso supporre $J=\{1,\dots,N\}$
$$0\le\|x-\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i\|^2=\langle x-\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i,\ x-\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i\rangle=$$
$$=\|x\|^2-\langle\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i,x\rangle+\langle x,-\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i\rangle+\langle\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i,\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i\rangle=$$
$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^N\langle\langle x,e_i\rangle e_i,x\rangle-\sum_{i=1}^N\langle x,\langle x,e_i\rangle e_i\rangle+\sum_{i,j=1}^N\langle\langle x,e_i\rangle e_i,\langle x,e_j\rangle e_j\rangle=$$
$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle\langle e_i,x\rangle-\sum_{i=1}^N\overline{\langle x,e_i\rangle}\langle x,e_i\rangle+\sum_{i,j=1}^N\langle x,e_i\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle=$$
$$=\|x\|^2-2\sum_{i=1}^N|\langle x,e_i\rangle|^2+\sum_{i=1}^N|\langle x,e_i\rangle|^2$$
$\square$

<u>Oss</u> Una conseguenza della disuguaglianza di Bessel è la seguente:
fissato $x\in H$, $I_x=\{i\in I:\langle x,e_i\rangle\neq0\}$ è al più numerabile
Infatti $I_x=\bigcup_n I_x^n$ dove $I_x^n=\{i\in I:\langle x,e_i\rangle>\frac{1}{n}\}$
$$\frac{1}{n^2}\#I_x^n\le\sup_{J\subseteq I_x^n}\sum_{i\in J}|\langle x,e_i\rangle|^2\le\|x\|^2$$

Dato $\{e_i\}_{i\in I}$ sistema ortonormale, si considera
$$M=\overline{\mathrm{Span}\{e_i\}_{i\in I}}$$

Teorema Per ogni $x\in H$, $\pi_M(x)=\sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i$, dove si dà senso a questa somma infinita in H

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo visto come conseguenza di Bessel che,
fissato $x\in H$, $I=\{i:|\langle x,e_i\rangle|\neq0\}$ è al più numerabile
A meno di ridenominazione, possiamo indicare $I_x=\mathbb{N}$.
Considero le somme parziali $\sum_{i=1}^M\langle x,e_i\rangle e_i=x_M$
Voglio dimostrare che $\{x_M\}\subseteq H$ è di Cauchy in H.
Fissati $h,k\in\mathbb{N}$, $k>h$, calcolo
$$\|x_k-x_h\|^2=\|\sum_{i=h+1}^k\langle x,e_i\rangle e_i\|^2=\sum_{i=h+1}^k|\langle x,e_i\rangle|^2$$
Uso la disuguaglianza di Bessel:
$$\|x_k\|^2=\sum_{i=1}^k|\langle x,e_i\rangle|^2\le\|x\|^2$$
$\Rightarrow$ la serie $\sum_{i=1}^{+\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$ converge
$\Rightarrow$ le sue somme parziali sono di Cauchy in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $\|x_k-x_h\|^2=S_k-S_h\longrightarrow0$ per $k,h\to+\infty$
$\Rightarrow\exists z=\sum_{i=1}^{+\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$

Mostro che $x-z$ è ortogonale a M

Mi basta dimostrare che $x-z = x - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ è ortogonale a ogni $e_j, j \in I$

Infatti, data la "linearità" di $\langle y, \cdot \rangle$, l'ortogonalità passa alle combinazioni lineari finite, e per continuità di $\langle y, \cdot \rangle$ passa alla chiusura

Fisso $j \in I$ e calcolo

$$\langle x - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \lim_{M \to +\infty} \langle x - \sum_{i=1}^{M} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \lim_{M \to +\infty} \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{M} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

per $M > j$

Quindi $\sum_{i \in I_x} \langle x, e_i \rangle e_i = \pi_M(x)$

Dato che $\pi_M(x)$ è univocamente determinato, per ogni ridenominazione di I_x si ottiene che la serie $\sum_{i \in I_x} \langle x, e_i \rangle e_i = \pi_M(x)$, si può parlare univocamente di $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ $\square$

DEF. $\{e_i\}_{i \in I}$ sistema ortonormale in H si dice **base hilbertiana** se $\overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{K}} \{e_i\}_{i \in I}} = H$.

DEF. $\{e_i\}_{i \in I}$ sistema ortonormale in H si dice **completo** se è massimale rispetto all'inclusione.

Si dimostra che in uno spazio di Hilbert questi concetti coincidono.

Teorema Sia H spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$. Sono equivalenti:

(1) $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ sistema ortonormale completo

(2) Se $x \in H$, verifica $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i$, allora $x = 0$

(3) $\overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{K}} \{e_i\}_{i \in I}} = H$

(4) $\forall x \in H \quad x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

(5) $\forall x, y \in H \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$ (uguaglianza di Parseval)

(6) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (identità di Bessel)

DIMOSTRAZIONE

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia $x \in H$ t.c. $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I$

Se fosse $x \neq 0$, allora, preso $M = \overline{\operatorname{Span} \{e_i\}_{i \in I}}$, $x \in M^\perp$

$\Longrightarrow$ posso considerare $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ ↯

(2) $\Rightarrow$ (3) Per assurdo $H \setminus \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{K}} \{e_i\}_{i \in I}} \neq \emptyset$, sia $x \in H \setminus M$.

$\Longrightarrow x = \pi_M(x) + \pi_{M^\perp}(x)$ ma $x \notin M \Longrightarrow \pi_{M^\perp}(x) \neq 0$

Posto $\tilde{x} = \pi_{M^\perp}(x)$, ottengo che $\tilde{x}$ è ortogonale a ogni $e_i, i \in I$ ↯

(3) $\Rightarrow$ (4) Dato che $M = \overline{\operatorname{Span} \{e_i\}_{i \in I}} = H$, allora $\forall x \in H \ \pi_M(x) = x$

e per il Teorema $\pi_M(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

(4) $\Rightarrow$ (5) Devo usare la continuità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quindi uso il Lemma

$x_M \longrightarrow x, y_M \longrightarrow y$ in H, quindi $\langle x_M, y_M \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$ per $M \to +\infty$

Infatti $|\langle x, y \rangle - \langle x_M, y_M \rangle| \leq |\langle x, y - y_M \rangle| + |\langle x - x_M, y_M \rangle| \leq$

$\underset{CS}{\leq} \|x\| \|y - y_M\| + \|x - x_M\| \|y_M\| \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$

Fissati $x, y \in H$, calcolo $\langle x,y \rangle$

Riordino come naturali gli indici $I_x \cup I_y$, cioè $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x,e_i \rangle e_i$, $y = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle y,e_i \rangle e_i$

$$\langle x,y \rangle = \lim_{M \to +\infty} \langle \sum_{i=1}^{M} \langle x,e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{M} \langle y,e_j \rangle e_j \rangle = \lim_{M \to +\infty} \sum_{i,j=1}^{M} \langle x,e_i \rangle \overline{\langle y,e_j \rangle} \langle e_i,e_j \rangle =$$
$$= \lim_{M \to +\infty} \sum_{i=1}^{M} \langle x,e_i \rangle \overline{\langle y,e_i \rangle}$$

Mi basta far vedere che la serie converge assolutamente

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x,e_i \rangle \overline{\langle y,e_i \rangle}| \underset{\text{H su } \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{M} |\langle x,e_i \rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{M} |\overline{\langle y,e_i \rangle}|^2\right)^{1/2} \leq \|x\| \, \|y\|$$

(5) $\Rightarrow$ (6) Prendo $y = x$ in (5)

(6) $\Rightarrow$ (1) Se per assurdo $\{e_i\}_{i \in I}$ non fosse massimale, $\exists x \in H \setminus \{0\}$ t.c. $\langle x,e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I$, $\langle x,x \rangle = 1$

ma è assurdo perché

$$1 = \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x,e_i \rangle|^2 = \lim_{M \to +\infty} \sum_{i=1}^{M} |\langle x,e_i \rangle|^2 = 0$$

$\square$

Teorema $\{e_i\}_{i \in I}$, con I numerabile, è base hilbertiana di H spazio di Hilbert $\iff$ H è separabile

DIMOSTRAZIONE

($\Rightarrow$) Prendo le combinazioni lineari finite a coefficienti in $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ o $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, che è denso e numerabile

($\Leftarrow$) Se H è separabile, prendo $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ insieme denso in H e applico il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Il fatto che $\mathrm{Span}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ sia denso resta invariato

$\square$

Teorema Sia H hilbert separabile. Allora H è isomorfo e isometrico a $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ base hilbertiana di H.

Definisco $\varphi : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ come $\varphi(x) = (\langle x,e_i \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$

Per Bessel $(\langle x,e_i \rangle)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ è ben definita e lineare

φ è continua $\|\varphi(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x,e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$

φ è iniettiva: $\langle x,e_i \rangle = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$

φ è surgettiva: data $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^2$, allora è ben definito $x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i e_i$

Infatti $x_M = \sum_{i=1}^{M} a_i e_i$ è di Cauchy in H

$\square$

Proposizione Sia H hilbert, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistema ortonormale completo.
Sia $\delta=(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_n>0$ e $Q_\delta=\{x\in H: x=\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k,\ |c_k|\leq\delta_k\ \forall k\}$
Allora Q_δ è compatto $\iff \sum_{k\in\mathbb{N}}\delta_k^2<+\infty$

DIMOSTRAZIONE

($\Longrightarrow$) Mostro che se $\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta_k^2=+\infty$, allora Q_δ non è compatto.
Sia $n_0:=1$; $\exists n_1$ t.c. $\sum_{j=n_0+1}^{n_1}\delta_j^2\geq 1$
Per ricorsione costruisco $\{n_j\}$, $n_j\nearrow+\infty$, t.c. $\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\delta_k^2\geq 1$
Sia $x_j:=\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\delta_k e_k\in Q_\delta\ \forall j$
Allora $\|x_j\|=\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\delta_k^2\geq 1$ e $\|x_j-x_i\|^2=\|x_j\|^2+\|x_i\|^2\geq 2\ \forall j\neq i$
Quindi $\{x_j\}$ non ammette sottosuccessioni convergenti

($\Longleftarrow$) Q_δ è chiuso in quanto intersezione di chiusi (quindi Q_δ è completo)
Sia π_n la proiezione su $\mathrm{Span}\{e_j,\ j\leq n\}$
$\pi_n Q_\delta$ è un sottospazio chiuso di uno spazio finito dimensionale ed è limitato $\Rightarrow \pi_n Q_\delta$ è compatto
Dato $\varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ t.c. $\|x-\pi_{n_0}(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}$
Infatti $\exists n_0$ t.c. $\|x-\pi_{n_0}(x)\|=\sum_{k=n_0+1}^{+\infty}|c_k|^2\leq\sum_{k=n_0+1}^{+\infty}\delta_k^2<\frac{\varepsilon}{2}$
$\Longrightarrow Q_\delta\subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\pi_{n_0}Q_\delta)$
$\pi_{n_0}Q_\delta$ compatto $\Longrightarrow \pi_{n_0}Q_\delta\subseteq\bigcup_{j=0}^{m}B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_j)$
$\Longrightarrow Q_\delta\subseteq\bigcup_{j=0}^{m}B_\varepsilon(p_j)$, quindi Q_δ è totalmente limitato, dunque compatto
Infatti, preso $x\in Q_\delta$, $\exists p_i$: $\pi_{n_0}x\in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_i)$
$\Longrightarrow \|x-p_i\|\leq\|x-\pi_{n_0}x\|+\|\pi_{n_0}x-p_i\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ $\square$

SERIE DI FOURIER

Consideriamo adesso il caso di $H = L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$
spazio di Hilbert con $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Su H si considera poi il sistema ortonormale $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n\in\mathbb{Z} \right\}$

Si verifica che è un sistema ortonormale:
$$\left\langle \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n\neq m \end{cases}$$

Vediamo che è un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$
Faccio vedere che $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{inx}, n\in\mathbb{Z}\}$ è denso in H.
Mi basta far vedere che è denso in $C^0_c([-\pi,\pi],\mathbb{C})$
Questa è una conseguenza del Teorema di Stone-Weierstraß.
Si consideri l'insieme delle funzioni $C^0_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) =$
$\{f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ continua su $[-\pi,\pi]$ e $f(-\pi)=f(\pi)\}$;
identificando i punti π e $-\pi$ e $[-\pi,\pi]/_{\sim} \cong S^1$, si ha che $C^0_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \cong C^0(S^1,\mathbb{C})$
Si considera ora la sottoalgebra di $C^0(S^1,\mathbb{C})$ dei polinomi trigonometrici
$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{n=-M}^{M} a_n e^{inx}, M\in\mathbb{N}, a_n\in\mathbb{C} \right\}$$
$\mathcal{A}$ è chiusa per coniugio e separa i punti:
dati $x_1,x_2\in S^1$ con $x_1\neq x_2$, posso identificarli con $x_1,x_2\in[-\pi,\pi]$ e $|x_1-x_2|<\pi$
$\Longrightarrow f(x)=e^{ix}\in\mathcal{A}$ e verifica $e^{ix_1}\neq e^{ix_2}$
Per Stone-Weierstraß, $\mathcal{A}$ è densa in $(C^0(S^1,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$
Si deduce quindi che
$$\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{inx}, n\in\mathbb{Z}\}}^{\|\cdot\|_{L^2}} \supseteq \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} \supseteq C^0_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \supseteq C^0_c([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

Quindi $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n\in\mathbb{Z}\right\}$ è un sistema ortonormale completo.

Definiamo $\forall f\in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ i coefficienti di Fourier

$$c_n(f) = ⨍_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

in modo tale che $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ (serie di Fourier complessa)

che vale per i teoremi precedenti
NOTA l'uguaglianza è in senso L^2, quindi si ha soltanto
$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x\in[-\pi,\pi]$ (convergenza puntuale della serie quasi ovunque)

Prima di proseguire, calcoliamo delle relazioni tra sommabilità di $(c_n(f)) \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ e regolarità della funzione $f \in L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$

proposizione Sia $f \in C^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ con $f(-\pi) = f(\pi)$. Allora $c_n(f') = in\, c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

DIMOSTRAZIONE
Calcolo $c_n(f')$ ($f' \in L^2$ perché $f' \in C^0([-\pi,\pi], \mathbb{C})$)
Se $n=0$: $c_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0$
Sia $n \neq 0$:

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in\, c_n(f) \qquad \square$$

Oss Se $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ è t.c. $\exists g \in L^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$: $f(x) = c + \int_{-\pi}^{x} g(t) dt$, allora f è continua e f è periodica $\iff$ g ha media nulla

proposizione Sia $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ t.c. $\exists g \in L^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ con $f(x) = c + \int_{-\pi}^{x} g(t) dt$ e g a media nulla. Allora $c_n(g) = in\, c_n(f)$ $\forall n$.

DIMOSTRAZIONE

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0$$

Per $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(c + \int_{-\pi}^{x} g(t) dt\right) e^{-inx} dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \chi_{[-\pi,x]}(t)\, e^{-inx}\, dt\, dx \overset{FT}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-\pi,x]}(t)\, e^{-inx} dx\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\int_{t}^{\pi} e^{-inx} dx\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(-\frac{1}{in}\left[e^{-inx}\right]_{t}^{\pi}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{in} c_n(g) \qquad \square$$

Oss I coefficienti di Fourier sono ben definiti per $f \in L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$.
Dalle proprietà viste per le basi hilbertiane, si ha che, per una tale f, $f \in L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C}) \iff (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

Oss I coefficienti di Fourier sono ben definiti anche per $f \in L^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$
Se $f \in L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$, si ha in più $(c_n(f)) \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ e vale l'identità di Bessel $\|f\|^2_{L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$
Infatti abbiamo visto che $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ è base hilbertiana di L^2

$$\Rightarrow \|f\|^2_{L^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\right|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Da dove nasce e quale motivazione ha l'idea di sviluppo in serie di Fourier?

esempio Consideriamo l'equazione $\begin{cases} y' = y+1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Esiste una soluzione C^1, ma la soluzione y verifica

y' = combinazione lineare di funzioni C^1 $\Rightarrow y \in C^2 \Rightarrow y' \in C^2 \Rightarrow \dots$

Quindi la soluzione y è C^∞

$y'(x_0) = y(x_0)+1$, $y''(x_0) = y'(x_0)$

Posso provare a recuperare lo sviluppo in serie di Taylor di y:

$$y(x) \overset{?}{=} y(x_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} D^k y(x_0)(x-x_0)$$

$$y(x) = Ce^x - 1$$

Moltiplico $y' = y+1$ per e^{-inx}

$$\int_{-\pi}^{\pi} y' e^{-inx} = \int_{-\pi}^{\pi} (y+1) e^{-inx} \Rightarrow C_n(y') = C_n(y) + C_n(1)$$

Magari c'è un metodo per ricavare $C_n(y)$

$$y(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(y) e^{inx}$$

1ª domanda: sotto quali ipotesi su $C_n(y)$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(y) e^{inx}$ converge a una funzione C^0, anzi C^1, ... ?

Che legame c'è tra $C_n(y)$ e $C_n(y')$?

Proposizione: convergenza uniforme della sdF

Sia $f \in C^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ periodica.

Allora la serie di Fourier associata a f $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx}$ converge totalmente a f su $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

(vale a dire $S_N = \sum_{|n|\le N} C_n(f) e^{inx} \xrightarrow{U} h$ su $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e $f = h$ q.o.).

DIMOSTRAZIONE

Uso la proposizione per verificare che $C_n(f') = inC_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

e $f' \in L^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \Rightarrow f' \in L^2$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f')|^2 < +\infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |inC_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |C_n(f)|^2 < +\infty$$

Questa ulteriore sommabilità di $C_n(f)$ assicura che $(C_n(f)) \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$

vale a dire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)| < +\infty$

Infatti mi basta scrivere

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)| = |C_0(f)| + \sum_{n\neq 0} |C_n(f)| \frac{|n|}{|n|} \overset{H}{\le} |C_0(f)| + \left(\sum_{n\neq 0} |nC_n(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Ma $|C_n(f)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |C_n(f) e^{inx}| = \|C_n(f) e^{inx}\|_\infty$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx}$ converge totalmente a $h \in C^0_{per}$

Dico che $h = f$ q.o. su $[-\pi,\pi]$

$S_N(f) \xrightarrow{U} h$ su $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ converge anche in norma $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

ma $S_N(f)$ è anche lo sviluppo in serie di Fourier di f

con $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ sistema ortonormale completo

$\Rightarrow f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx}$ su L^2, quindi $f = h$ q.o. su $[-\pi,\pi]$ $\square$

Abbiamo visto che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 < +\infty \implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$

$\implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = h(x)$ e $S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} c_n(f) e^{inx} \xrightarrow{U} h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

$\implies S_N \longrightarrow h$ in L^2

Infatti $\|S_N(f) - h\|_{L^2} = \|\sum_{|n|>N} c_n(f) e^{inx}\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi}\, \|\sum_{|n|>N} c_n(f) e^{inx}\|_\infty \longrightarrow 0$

dal fatto $\|w\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} w^2} \leq \sqrt{2\pi \|w\|_\infty^2}$

$S_N(f) \longrightarrow f$ in L^2, ma il limite in L^2 è unico $\implies f = h$ q.o.

<u>Oss</u> In generale la serie di Fourier converge in L^2 ma non uniformemente.

Come si generalizza questo risultato per funzioni non C^1?

Proposizione Sia f t.c. $\exists c \in \mathbb{R}$, $\exists g \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ a media nulla t.c. $f(x) = c + \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$.
Allora la serie di Fourier associata a f $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge totalmente a f su $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE

$g \in L^2 \implies g \in L^1$ quindi $c_n(g) = in\,c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$g \in L^2 \iff (c_n(g)) \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$

$\implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 < +\infty$

Ma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2$

dopodiché la dimostrazione è analoga $\square$

Proposizione Sia $f \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ t.c. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$.
Allora la serie di Fourier converge uniformemente a f e f ammette un rappresentante in C^0_{per}.

<u>NOTA</u> $C^k_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) = \{ f \in C^k([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ con $D^h f(\pi) = D^h f(-\pi)$ $\forall h = 0,\dots,k \}$

Proposizione Sia $f \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ t.c. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k |c_n(f)| < +\infty$ per $k \in \mathbb{N}$ fissato.
Allora f ammette un rappresentante in $C^k_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su k.

Per $k=0$, è il risultato di prima.

Per $k=1$: per ipotesi, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\,c_n(f)| < +\infty \implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty \implies f \in C^0_{per}$

$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

Definisco $R_N(x) = \sum_{|n|\leq N} in\,c_n(f) e^{inx} \in C^0_{per}$

L'ipotesi dice che $R_N \xrightarrow{U} g$ perché $\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\,c_n(f)$ converge totalmente

$R_N \xrightarrow{U} g$, $S_N \xrightarrow{U} f$: voglio mostrare che $g = f'$

Mi basta vedere che f verifica il TFCI con g
Integro, a x fissato, su $(-\pi, x)$ le funzioni R_N

$$S_N = \sum_{|n|\le N} c_n(f) e^{inx} \in C^1_{per} \implies S_N(f)' = \Big(\sum_{|n|\le N} c_n(f) e^{inx}\Big)' = \sum_{|n|\le N} in\, c_n(f) e^{inx} = R_N(x)$$

$$\implies S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{x} R_N(t)\,dt + S_N(f)(-\pi)$$

Passo al limite su $N \to +\infty$: $S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$ e $\int_{-\pi}^{x} R_N(t)\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$

$$\implies f(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt + f(-\pi) \implies g = f'$$

$\square$

Proposizione Sia $f \in C^k([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ e $D^h f(\pi) = D^h f(-\pi)$ $\forall h < k$

$$\implies c_n(D^h f) = i^h n^h c_n(f) \quad \forall h \le k.$$

Inoltre $S_N(D^h f) \xrightarrow{\ U\ } D^h f$ $\forall h < k$

$$\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 < +\infty \implies \sum |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su k

- $k=1$ già visto
- Sia $g = D^{h-1} f$ è periodica e $C^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$

  Applico il teorema: g' verifica $c_n(g') = in\, c_n(g)$,

  cioè $c_n(D^h f) = in\, c_n(D^{h-1} f) = in\, i^{h-1} n^{h-1} c_n(f) = i^h n^h c_n(f)$

  Una volta visto che $c_n(D^k f) = i^k n^k c_n(f)$

  uso che $f \in C^k \implies D^k f \in L^2 \implies \sum |i^k n^k c_n(f)|^2 < +\infty$

  $$\implies \sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 < +\infty$$

  Usando la solita disuguaglianza, si ottiene che

  $\sum |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$ e si conclude per il teorema precedente.

  $$\sum |n|^{\beta} |c_n(f)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^k |c_n(f)| \cdot \frac{|n|^\beta}{|n|^k} \underset{CS}{\le} \sqrt{\underbrace{\sum \Big(\frac{1}{|n|^{k-\beta}}\Big)^2}_{+\infty \iff 2k-2\beta > 1} \ \underbrace{\sum n^{2k} |c_n(f)|^2}_{+\infty}}$$

  cioè $\beta < k - \frac{1}{2}$

$\square$

Convergenza puntuale della serie di Fourier

Sia $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ a meno di ridenominazioni chiamiamo ancora f l'estensione 2π-periodica a tutto $\mathbb{R}$.

Supponiamo $f \in L^1([-\pi,\pi], \mathbb{C})$

Ci chiediamo per quali ulteriori ipotesi, per $x_0 \in [-\pi,\pi]$ fissato,

$S_N(f)(x_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx_0}$ converge e converge a x_0

Def. Definiamo i nuclei di Dirichlet

$D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny}$ definita per $y \in \mathbb{R}$

Proprietà di D_N:

(i) D_N è 2π-periodica

(ii) $⨍_{-\pi}^{\pi} D_N(y)dy = 1 \quad \forall N$

(iii) $D_N(y) = \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})}$ per $y \neq 0$, $D_N(0) = 2N+1$

DIMOSTRAZIONE

(ii) $⨍_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{iny}\, dy = \sum_{n=-N}^{N} ⨍_{-\pi}^{\pi} \cos(ny) + i\sin(ny)\, dy = ⨍_{-\pi}^{\pi} \cos(0) = 1$

(iii) $D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} (e^{iy})^{n+N-N} = e^{-iNy} \sum_{m=0}^{2N} (e^{iy})^m = e^{-iNy} \dfrac{(e^{iy})^{2N+1} - 1}{e^{iy} - 1} =$

$= \dfrac{(e^{iy})^{N+1} - e^{-iNy}}{e^{iy} - 1} = \dfrac{e^{i\frac{y}{2}}\left(e^{iy(N+\frac{1}{2})} - e^{-i(N+\frac{1}{2})y}\right)}{e^{i\frac{y}{2}}\left(e^{i\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{y}{2}}\right)} = \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})}$ □

Lemma di Riemann-Lebesgue

Data $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\lim_{p \to \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} h(y) \sin(py)dy = 0.$

DIMOSTRAZIONE

Per densità delle funzioni regolari a supporto compatto

$\int_{\mathbb{R}} h(y)\sin(py)\,dy = -h(y)\dfrac{\cos(py)}{p}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} h'(y)\dfrac{\cos(py)}{p}dy \leq \dfrac{\|h'\|_{L^\infty} |\mathrm{spt}\, h|}{p} \xrightarrow[p\to\pm\infty]{} 0$

Sia ora $h \in L^1$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ t.c. $\|h-\varphi\|_{L^1} < \varepsilon$

$|\int_{\mathbb{R}} h(y)\sin(py)dy| \leq |\int_{\mathbb{R}} (h-\varphi)\sin(py)dy| + |\int_{\mathbb{R}} \varphi \sin(py)dy|$

$\limsup_{p\to+\infty} |\int_{\mathbb{R}} h(y)\sin(py)dy| \leq \limsup_{p\to+\infty} |\int_{\mathbb{R}}(h-\varphi)\sin(py)dy| \leq$

$\leq \limsup_{p\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |h-\varphi|\,|\sin(py)|dy \leq \varepsilon$ □

Lemma di Riemann-Lebesgue generalizzato

Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ T-periodica, si ha

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(px)dx \xrightarrow[p\to\pm\infty]{} ⨍_0^T \varphi(z)dz \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$

Proposizione Se $\exists U$ intorno di x_0 $\exists \alpha > 0$ $\exists M > 0$ t.c. $f|_U$ è α-hoelderiana su U (cioè $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$ $\forall x, y \in U$), allora $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} f(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE

$$S_N(f)(x_0) = \sum_{n=-N}^{N} \left(⨍_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx_0} = ⨍_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x_0 - t)} dt$$

Si verifica che $S_N(f)(x_0) = ⨍_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x_0 - t) dt \underset{\uparrow}{=} ⨍_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt$

l'integrale sul periodo di una funzione periodica è invariante per traslazione dell'intervallo di integrazione

Quindi $S_N(f)(x_0) = ⨍_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) D_N(y) dy$

$$\Longrightarrow S_N(f)(x_0) - f(x_0) = ⨍_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) D_N(y) dy =$$
$$= ⨍_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} dy$$

Sotto l'ipotesi di α-holderianità in $U(x_0)$ (non è restrittivo supporre $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$)

$$h(y) = \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(\frac{y}{2})} \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(y)| dy = \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(\frac{y}{2})} \right| dy}_{(I)} + \underbrace{\int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)} \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(\frac{y}{2})} \right| dy}_{(II)}$$

$\forall y \in (-\delta, \delta)$, $x_0 - y, x_0 \in U(x_0)$ e $|f(x_0 - y) - f(x_0)| \leq M |y|^\alpha$

$$(I) \leq M \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\frac{|y|^\alpha}{|\sin(\frac{y}{2})|}}_{\sim \frac{1}{|y|^{1-\alpha}}} dy \in \mathbb{R}$$

$$(II) = \int_{-\pi}^{-\delta} \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(\frac{y}{2})} \right| dy + \int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(\frac{y}{2})} \right| dy \leq \int (|f(x_0 - y)| + |f(x_0)|) \max \frac{1}{|\sin(\frac{y}{2})|} dy < +\infty$$

$\in C^0([-\pi, -\delta])$ e non si annulla

$$\Longrightarrow S_N(f)(x_0) - f(x_0) = ⨍_{-\pi}^{\pi} h(y) \sin((N + \tfrac{1}{2})y) dy \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \quad \text{per RL}$$

$\square$

Proposizione Sia $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ e su $[-\pi, x_0)$, $(x_0, \pi]$ f è α-holderiana.
Allora $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

esempio $f(x) = x^2$ estesa per 2π-periodicità su $\mathbb{R}$
la SdF converge uniformemente
la funzione $g(x) = x$ (sua "derivata")
converge a $\tilde{x}$ in ogni punto $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Nei punti $\pi + 2k\pi$ tende a $0 = \frac{\pi + (-\pi)}{2}$

Disuguaglianza isoperimetrica

Siamo nell'ambito di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ e "di perimetro finito"

$\forall \Omega$ limitato t.c. $\partial\Omega$ è parametrizzato da una curva semplice (che non si autointerseca) di lunghezza L, allora

$$\text{area}(\Omega) \leq \text{area}(B) \quad \text{con } B \text{ t.c. } \text{Per}(B) = L = 2\pi r$$

$$\left(\text{da cui } r = \frac{L}{2\pi} \longrightarrow \text{area}(B) = \frac{1}{4\pi} L^2\right)$$

Dato Ω come sopra con $\text{lungh}(\partial\Omega) = L$ e $A = \text{area}(\Omega)$, è equivalente

$$4\pi A \leq L^2$$

Assumo $\partial\Omega$ = supporto di una curva regolare, parametrizzata con $|\dot\gamma(t)| = \text{cost}$

$$\ell(\gamma) = \text{lungh}(\partial\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} |\dot\gamma(t)|\,dt = L \Longrightarrow |\dot\gamma(t)| = \frac{L}{2\pi}$$

$$\text{area}(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$$

assumiamo che γ percorra $\partial\Omega$ in senso antiorario

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_x(t)\dot\gamma_y(t) - \gamma_y(t)\dot\gamma_x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}(i\gamma(t)\overline{\dot\gamma(t)})\,dt$$

Identificazione di $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$: $\gamma(t) = \gamma_x(t) + i\gamma_y(t)$

γ chiusa $\Longrightarrow \gamma(\pi) = \gamma(-\pi) \longrightarrow$ sviluppo in serie di Fourier

$\dot\gamma(t) \in S'$

$\gamma(t), \dot\gamma(t)$ hanno sviluppo in serie di Fourier complessa

$$\gamma(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{int} \quad \dot\gamma(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n e^{int} \quad \text{con } \beta_n = in\gamma_n$$

$$\text{area}(\Omega) = \frac{1}{2}\text{Re}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} i\gamma(t)\cdot\underbrace{\overline{\dot\gamma(t)}}_{=(\sum_n \gamma_n e^{int})(-\sum_m im\bar\gamma_m e^{-imt})}dt\Big) = \frac{1}{2}\text{Re}\Big(-i^2\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\gamma_n m\bar\gamma_m e^{int}e^{-imt}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\text{Re}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_n\bar\gamma_n\, n\, 2\pi\Big) = \frac{1}{2}2\pi\,\text{Re}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|\gamma_n|^2\Big) = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|\gamma_n|^2 \leq \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\gamma_n|^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\dot\gamma(t)|^2dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{L^2}{4\pi^2}dt = \frac{L^2}{2\pi} = \|\dot\gamma\|^2_{L^2} = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\gamma_n|^2 n^2$$

$$\Longrightarrow \text{area}(\Omega) \leq \pi\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{4\pi}$$

Equazione del calore

Ω corpo fatto di un certo materiale omogeneo (configurazione di riferimento in $\mathbb{R}^d$)
Denotiamo $u(t,x)$ la temperatura al tempo t nel punto $x\in\Omega$.

Esiste una costante $C_\Omega>0$ inversamente proporzionale alla conduttività termica e direttamente proporzionale alla capacità termica tale che la legge differenziale seguita da u è

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=C_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+\underbrace{f(t,x)}_{\text{fonte di calore esogena (supponiamo } f=0)}$$

Serve:
- temperatura ad un certo istante t_0 ($t_0=0$)
- altre condizioni, ad esempio $u|_{\partial\Omega}=v$ assegnata, $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$ (derivata normale su $\partial\Omega$)
  nel caso di Fourier, Ω anello 1-dimensionale $\longrightarrow$ periodicità

Prendiamo $\Omega=[-\pi,\pi]$, $u(t,x)$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ 2π-periodiche in x

$$\begin{cases} u_t=C_\Omega u_{xx} & \forall (t,x)\in(0,T)\times[-\pi,\pi] \\ u(t,\pi)=u(t,-\pi) & \forall t>0 \\ u_x(t,\pi)=u_x(t,-\pi) & \forall t>0 \\ u(0,x)=u_0(x) & \forall x\in[-\pi,\pi] \end{cases}$$

<u>Scopo</u>: esistenza di una soluzione

Trovare una soluzione vuol dire trovare $u\in C^0([0,T)\times[-\pi,\pi],\mathbb{R})$ C^1 nella variabile t e C^2 nella variabile x su $(0,T)\times[-\pi,\pi]$

A t fissato, $u(t,\cdot)\in C^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})\Rightarrow$ è L^2, quindi ha senso calcolare i coefficienti di Fourier
Suppongo di avere una soluzione u di classe C^0, C^1_t, C^2_{xx} di $u_t(t,x)=C_\Omega u_{xx}(t,x)$
Pertanto $\langle u_t(t,x), e^{inx}\rangle = C_\Omega\langle u_{xx}(t,x), e^{inx}\rangle$ $\forall t>0$ fissato

$$2\pi C_n(u_t)=C_\Omega 2\pi C_n(u_{xx})=C_\Omega 2\pi in C_n(u_x)=C_\Omega 2\pi (in)^2 C_n(u) \quad (\text{dove } u_x=u_x(t,\cdot))$$

$$\Longrightarrow C_n(u_t)=C_\Omega (in)^2 C_n(u)$$

Adesso $C_n(u_t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)e^{-inx}\,dx \overset{\text{Teo}}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi}u(t,x)e^{-inx}\,dx=\frac{d}{dt}C_n(u(t,\cdot))$

Pertanto $\forall t>0$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}C_n(u(t,\cdot))=-n^2C_\Omega C_n(u(t,\cdot)) \\ C_n(u(0,\cdot))=C_n(u_0(\cdot))\end{cases}$$

successione di ODE per $n\in\mathbb{Z}$ che caratterizza $C_n(u(t,\cdot))$

$$C_n(u(t,\cdot))=k e^{-C_\Omega n^2 t}=C_n(u_0(\cdot))e^{-C_\Omega n^2 t}$$

Dunque in L^2 la soluzione verifica $u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(u_0(\cdot))e^{-C_\Omega n^2 t}e^{inx}$

Teorema Sia $u_t=C_\Omega u_{xx}$, $u(0,x)=u_0(x)$ e u, u_x 2π-periodiche in x $\forall t>0$.
Supponiamo che $u_0\in C^0([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|C_n(u_0)|<+\infty$.
Allora $\exists!\, u(x,t)\in C^0([0,+\infty)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$ soluzione dell'equazione data definita per $[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]$ e di classe $C^\infty((0,+\infty)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$
Inoltre, se u_0 è reale, anche $u(t,x)$ è reale.

DIMOSTRAZIONE

Fissata u_0, conosco $C_n(u_0)=C_n^0$ e so che $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|C_n^0|<+\infty$

$$\Longrightarrow u(t,x)\overset{L^2}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n^0 e^{-C_\Omega n^2 t}e^{inx}$$

Dico che questa serie di funzioni di (t,x) converge totalmente in $[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]$:
$\sum_{n=-N}^{N} \|c_n^0 e^{inx-c_2 n^2 t}\|_{L^\infty([0,+\infty)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})} = \sum_{n=-N}^{N} |c_n^0|$ è una serie convergente
$\Longrightarrow$ la serie converge totalmente su $[0,+\infty)\times[-\pi,\pi]$
$\Longrightarrow u(t,x)$ è definita puntualmente e $u\in C^0([0,+\infty)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e periodica in x $\forall t\geq 0$

Scrivo la serie di funzioni $u_N(t,x)=\sum_{n=-N}^{N} c_n^0 e^{inx-c_2n^2t} \in C^\infty$
e $\frac{\partial^h}{\partial t^h}\frac{\partial^k}{\partial x^k} u_N(t,x)=\sum_{n=-N}^{N} c_n^0 \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{inx} \frac{\partial^h}{\partial t^h} e^{-c_2 n^2 t}$
dico che questa converge totalmente in $[\delta,+\infty)\times[-\pi,\pi]$ $\forall\delta>0$

Ora $\frac{\partial^h}{\partial t^h}\frac{\partial^k}{\partial x^k} u_N = \sum_{n=-N}^{N} (in)^k c_n^0 e^{inx}(-c_2n^2)^h e^{-c_2n^2t} = \sum_{n=-N}^{N} i^k(-c_2)^h c_n^0 n^{2h+k} e^{inx} e^{-c_2n^2t}$
$\|\frac{\partial^h}{\partial t^h}\frac{\partial^k}{\partial x^k} u_N\|_{L^\infty([\delta,+\infty)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})} = \sum_{n=-N}^{N} |c_n^0|\,|n|^{2h+k} e^{-c_2n^2\delta} < +\infty$
infatti a δ fissato, $\lim_{n\to+\infty} |n|^{2h+k} e^{-c_2n^2\delta}=0$
quindi è definitivamente ≤ 1, e sappiamo che $\sum |c_n^0|$ è convergente
$u_N(t,x)=\int_0^t \frac{\partial u_N}{\partial t}(s,x)ds + u_N(0,x)$, $\quad \partial_t u_N \longrightarrow \varphi$, allora $u(t,x)=\int_0^t \varphi(s,x)dx + u(0,x)$
(stiamo usando che $C^1\ni g_N \longrightarrow g$ punt., $g_N' \xrightarrow{U} \varphi \Longrightarrow \varphi = g'$)
Quindi $u(t,x)=$ serie delle u_N è C^∞.

- $u(0,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^0 e^{inx} e^{-c_2n^2t}\big|_{t=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^0 e^{inx} = u_0(x)$
- u è 2π-periodica in x $\forall t$ perché limite uniforme di somma di 2π-periodiche
- u_x è 2π-periodica in x $\forall t$ perché limite uniforme di $\partial_x u_N = \sum_{n=-N}^{N} inc_n^0 e^{inx} e^{-c_2n^2t}$ che è 2π-periodica

$(u_N)_t = \sum_{n=-N}^{N} c_n^0 e^{inx}(-c_2n^2)e^{-c_2n^2t} = -c_2\sum_{n=-N}^{N} c_n^0 n^2 e^{inx-c_2n^2t}$
mentre $(u_N)_{xx}=\sum_{n=-N}^{N} c_n^0 (in)^2 e^{inx-c_2n^2t} \Longrightarrow (u_N)_t = c_2(u_N)_{xx}$
e per convergenza uniforme su $[\delta,+\infty)\times[-\pi,\pi]$ $\forall\delta>0$
$u_t = c_2 u_{xx}$ per $t\geq\delta$ $\forall\delta$, quindi $\forall t>0$.

Inoltre, fissato $t>0$, allora $\overline{u(t,x)} = u(t,x)$
sapendo che $\overline{u_0(x)}=u_0(x)$

Data $v=\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$: v è reale $\Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\gamma_n} e^{-inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$
quindi v è reale $\Longleftrightarrow \overline{\gamma_n}=\gamma_{-n}$
Ora $u_0(x)\in\mathbb{R} \Longrightarrow \overline{c_n^0} = c_{-n}^0$ $\forall n\in\mathbb{Z}$
Calcolo $\overline{u(t,x)}$ (il coniugio è un'operazione continua).
$\overline{u(t,x)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n^0} e^{-inx} e^{-c_2n^2t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}^0 e^{inx} e^{-c_2n^2t} = u(t,x)$ $\square$

Proposizione Esiste $u_0\in C^\infty_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ t.c. l'equazione del calore non ammette soluzione per $t<0$.

DIMOSTRAZIONE

Considero $c_n = e^{-|n|}$ e definisco $u_0(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx}$
Dato che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^h c_n^0 < +\infty \Longrightarrow u_0$ è C^∞_{per}
Riguardo l'eventuale soluzione, abbiamo visto che, tenendo conto di u, u_x 2π-periodiche, ogni $u(t,x)$ soluzione si scrive come $u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{inx} e^{-c_2n^2t}$ $\forall t\in I\times[-\pi,\pi]$
Infatti i $c_n(t)$ verificano $\begin{cases} c_n'(t) = -c_2n^2 c_n(t) \\ c_n(0)=c_n^0 \end{cases}$ $\forall t\in I, \forall n\in\mathbb{Z}$
$\Longrightarrow u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|} e^{inx} e^{-c_2n^2t}$
ma questa serie, per un insieme di misura positiva in x, non converge per $t<0$ $\square$

Equazione delle onde

$$(EO)\begin{cases} u_{tt} = \hat{C}_\Omega u_{xx} & \forall (t,x)\in(-T,T)\times[-\pi,\pi] \\ u(t,\pi)=u(t,-\pi) & \forall t\in(-T,T) \\ u_x(t,\pi)=u(t,-\pi) & \forall t\in(-T,T) \\ u(0,x)=u_0(x) & \forall x\in[-\pi,\pi] \\ u_t(0,x)=u_1(x) & \forall x\in[-\pi,\pi] \end{cases}$$

$\hat{C}_\Omega > 0$ $\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u(-t,x)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\right)(-t,x)$

Cerco una soluzione $u\in C^2((-T,T)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

Teorema 1 Data (EO), ogni soluzione $u(t,x)\in C^2((-T,T)\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$ per qualche $T>0$, è unica e univocamente determinata dalle ODE del 2° ordine soddisfatte da $C_n(u(t,\cdot))$ e con i dati iniziali ereditati da $u_0(x)$ e $u_1(x)$.

Teorema 2 Sia $u_0\in C^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, $u_1\in C^1_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.
Allora esiste $u(t,x)$ soluzione di (EO) di classe $C^2(\mathbb{R}\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$.
In particolare, esistono $A_0,B_0\in\mathbb{C}$, $\varphi_+,\varphi_-\in C^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ a media nulla t.c.
$u(t,x)=A_0+B_0t+\varphi_+(x+\gamma t)+\varphi_-(x-\gamma t)$ dove $\gamma^2=\hat{C}_\Omega$

Teorema 3 Siano $u_0,u_1:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ t.c.
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|C_n(u_0)|<+\infty$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\,|C_n(u_1)|<+\infty$.
Allora esiste $u(t,x)$ soluzione di (EO) di classe $C^2(\mathbb{R}\times[-\pi,\pi],\mathbb{C})$.
In particolare, esistono $A_0,B_0\in\mathbb{C}$, $\varphi_+,\varphi_-\in C^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ a media nulla t.c.
$u(t,x)=A_0+B_0t+\varphi_+(x+\gamma t)+\varphi_-(x-\gamma t)$ dove $\gamma^2=\hat{C}_\Omega$.

Supponiamo di avere una soluzione $u(t,x)$ di (EO).
Allora $u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(u(t,\cdot))e^{inx}$

Faccio il prodotto scalare tra $u_{tt}=\gamma^2u_{xx}$ e e^{inx}:
$\frac{d^2}{dt^2}C_n(u(t,\cdot))=⨍_{-\pi}^{\pi}u_{tt}e^{-inx}dx=\gamma^2⨍_{-\pi}^{\pi}u_{xx}e^{-inx}dx=\gamma^2 C_n(u_{xx}(t,\cdot))=(in)^2\gamma^2C_n(u(t,\cdot))$

Quindi $\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}C_n(u(t,\cdot))=-(\gamma n)^2C_n(u(t,\cdot)) \\ C_n(u(0,\cdot))=C_n(u_0) \\ C_n(u_t(0,\cdot))=C_n(u_1)\end{cases}$ dove $C_n(u(t,\cdot))=⨍_{-\pi}^{\pi}u(t,x)e^{-inx}dx$

$\Longrightarrow$ le soluzioni di queste ODE indicizzate da $n\in\mathbb{Z}$ sono univocamente determinate

Calcoliamo in termini di $C_n(u_0)$ e $C_n(u_1)$ le soluzioni delle ODEs sopra.

$\varphi_n = C_n(u(t,\cdot))$ $\quad \begin{cases} \varphi_n'' = -(\gamma n)^2 \varphi_n \\ \varphi_n(0) = C_n(u_0) \\ \varphi_n'(0) = C_n(u_1) \end{cases}$

$\Longrightarrow \varphi_n(t) = A_n e^{i\gamma n t} + B_n e^{-i\gamma n t}$ se $n \neq 0$

$\varphi_0(t) = A_0 + B_0 t = C_0(u_0) + C_0(u_1) t$

Poi $\varphi_n(0) = A_n + B_n = C_n(u_0)$

$\varphi_n'(0) = i\gamma n A_n - i\gamma n B_n = C_n(u_1)$ $\Longrightarrow \begin{cases} A_n = \frac{1}{2}\left(C_n(u_0) + \frac{C_n(u_1)}{i\gamma n}\right) \\ B_n = \frac{1}{2}\left(C_n(u_0) - \frac{C_n(u_1)}{i\gamma n}\right) \end{cases}$

$\Longrightarrow \varphi_n(t) = \frac{1}{2}\left(C_n(u_0) + \frac{C_n(u_1)}{i\gamma n}\right) e^{i\gamma n t} + \frac{1}{2}\left(C_n(u_0) - \frac{C_n(u_1)}{i\gamma n}\right) e^{-i\gamma n t}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n(t) e^{inx} = C_0(u_0) + C_0(u_1) t + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} A_n e^{i\gamma n t} e^{inx} + B_n e^{-i\gamma n t} e^{inx}$

cioè $u(t,x) = A_0 + B_0 t + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} A_n e^{inx + in\gamma t} + B_n e^{inx - in\gamma t}$

Definisco φ_+, φ_- di L^2 individuate da

$\varphi_+(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} A_n e^{inz}$ e $\varphi_-(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} B_n e^{inz}$

Otteniamo quindi $u(t,x) = A_0 + B_0 t + \varphi_+(x+\gamma t) + \varphi_-(x-\gamma t)$

Dimostriamo che φ_+, φ_- sono ben definite e di classe C^2_{per}

Mi basta far vedere che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|A_n| + |B_n|) < +\infty$

$n^2 A_n = \frac{1}{2}\left(n^2 C_n(u_0) - ni \frac{C_n(u_1)}{\gamma}\right)$ $\quad n^2 B_n = \frac{1}{2}\left(n^2 C_n(u_0) + ni \frac{C_n(u_1)}{\gamma}\right)$

$\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|A_n| + |B_n|) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |C_n(u_0)| + \frac{1}{\gamma} n |C_n(u_1)| < +\infty$

Resta da dimostrare che $u(t,x) = C_0(u_0) + C_0(u_1) t + \varphi_+(x+\gamma t) + \varphi_-(x-\gamma t)$ verifica l'equazione

$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = C_0(u_1) + \varphi_+'(x+\gamma t)\gamma - \gamma \varphi_-'(x-\gamma t)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \varphi_+''(x+\gamma t) + \gamma^2 \varphi_-''(x-\gamma t)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_+'(x+\gamma t) + \varphi_-'(x-\gamma t)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi_+''(x+\gamma t) + \varphi_-''(x-\gamma t)$ $\Longrightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$u(0,x) = C_0(u_0) + \sum_{n\neq 0} \underbrace{(A_n + B_n)}_{= C_n(u_0)} e^{inx}$

$u_t(0,x) = C_0(u_1) + \gamma \varphi_+'(x) - \gamma \varphi_-'(x)$

u, u_x sono 2π-periodiche per t fissato perché $\varphi_+, \varphi_- \in C^2_{per}$

C'è da finire il Teorema 2

$u_t(t,x) = B_0 + \gamma \varphi_+'(x+\gamma t) - \gamma \varphi_-'(x-\gamma t)$

$u_{tt}(t,x) = \gamma^2 \varphi_+''(x+\gamma t) + \gamma^2 \varphi_-''(x-\gamma t) = \gamma^2 u_{xx}(t,x)$

Rimangono da soddisfare dati iniziali e condizioni di periodicità

Lemma Sia $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua con $g' = h$, $T>0$. Allora
g T-periodica $\iff$ h T-periodica e $\int_0^T h(x)dx = 0$.

DIMOSTRAZIONE

$(\Longrightarrow)$ $h(x+T) = g'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+T+h)-g(x+T)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x) = h(x)$
e $\int_0^T h(x)dx = g(T) - g(0) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ $g(x+T) - g(x) = \int_x^{x+T} h(y)dy = \int_0^T h(y)dy = 0$ $\square$

$$\begin{cases} u(0,x) = A_0 + \varphi_+(x) + \varphi_-(x) & = u_0(x) \\ u_t(0,x) = B_0 + \gamma\varphi_+'(x) - \gamma\varphi_-'(x) & = u_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_+ + \varphi_- = u_0 - A_0 & =: g_0 \in C^2_{per} \\ \underbrace{\varphi_+' - \varphi_-'}_{(\varphi_+ - \varphi_-)'} = \frac{1}{\gamma}(u_1 - B_0) & =: h_1 \in C^1_{per} \end{cases}$$

e φ_+, φ_- 2π-periodiche $\Longrightarrow \varphi_+ + \varphi_-$ e $\varphi_+ - \varphi_-$ 2π periodiche

Impongo che g_0 e h_1 abbiano media nulla:
$$A_0 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_0(x)dx \qquad e \qquad B_0 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_1(x)dx$$

Per il Lemma, h_1 ammette una primitiva C^2_{per} e a media nulla g_1

$$\begin{cases} (\varphi_+ - \varphi_-)(x) = g_1(x) \\ (\varphi_+ + \varphi_-)(x) = g_0(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_+(x) = \frac{1}{2}(g_0(x) + g_1(x)) \\ \varphi_-(x) = \frac{1}{2}(g_0(x) - g_1(x)) \end{cases}$$

così φ_+ e φ_- sono 2π-periodiche e a media nulla.

<u>Oss</u> La scelta di φ_+ e φ_- a media nulla dà unicità della scrittura

Metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u_{tt} = c_\Omega c_{xx} \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{equazione di una corda vibrante}$$

Metodo disperato: spero $u(t,x) = h(t)g(x)$ con $h, g \in C^2$

Impongo $u(t,x)$ soluzione: $h''(t)g(x) = c_\Omega h(t)g''(x)$

se possiamo dividere $\frac{h''(t)}{h(t)} = c_\Omega \frac{g''(x)}{g(x)}$, ma sono di variabili diverse

dovrà essere $\begin{cases} \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda \\ g(\pi) = g(-\pi) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g''(x) = \lambda g(x) \\ g(\pi) = g(-\pi) = 0 \end{cases}$ $\quad z^2 - \lambda = 0 \longrightarrow z = \pm i\sqrt{-\lambda}$

Questa equazione ha sol. non nulla sse $\lambda < 0$ e $g(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$

Imponendo le condizioni al bordo $\begin{cases} A\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \\ -A\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \end{cases}$

$\iff \sqrt{-\lambda}\pi = k\pi$, cioè $-\lambda = k^2$ $\xrightarrow[\text{conti}]{}$ $g(x) = A_k \sin(kx)$ $\quad k = 1, 2, 3, \dots$

Metodo di separazione delle variabili + condizioni al bordo:
è cruciale stabilire l'esistenza di autofunzioni e autovalori di alcuni operatori differenziali

TRASFORMATA DI FOURIER

operatori lineari su spazi di Hilbert

Sia H spazio di Hilbert, $D \subseteq H$ sottospazio vettoriale denso in H e $T : D \longrightarrow H$ lineare.

Def. T si dice autoaggiunto se $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \forall u,v \in D$.

Def. λ è autovalore di T se $\exists\, w \neq 0$ t.c. $Tw = \lambda w$

Proposizione Sia $T : D \longrightarrow H$ lineare autoaggiunto. Allora, dati λ, μ autovalori distinti di T, ogni loro coppia di autovettori è ortogonale.

DIMOSTRAZIONE

w, v F-autovettori per λ, μ rispettivamente

Allora $\lambda \langle w, v\rangle = \langle \lambda w, v\rangle = \langle Tw, v\rangle = \langle w, Tv\rangle =$

$= \langle w, \mu v\rangle = \bar{\mu} \langle w, v\rangle$

Quindi $\lambda = \bar{\mu}$ oppure $\langle w, v\rangle = 0$

D'altra parte T ha solo autovalori reali:

$\lambda \langle w, w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \langle Tw, w\rangle = \langle w, Tw\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \bar{\lambda} \langle w, w\rangle$ $\square$

Oss Se $T : D \longrightarrow H$ è limitato e lineare, allora T si estende (unicamente) a $H = \bar{D}$ per uniforme continuità

esempio $H = L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, $D = C^2_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

$T : D \longrightarrow H$, $u \longmapsto u''$ è ben definito e lineare

Nell'es, l'operatore non è limitato (es. $\sin(nx)$)

è autoaggiunto? $u, v \in D$

$\langle v, Tu\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\overline{u''(x)}\,dx = v(x)\overline{u'(x)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} v'(x)\overline{u'(x)}\,dx =$

$= -v'(x)\overline{u(x)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} v''(x)\overline{u(x)}\,dx = \langle Tv, u\rangle$

Esistono autovalori per T?

$u'' = \lambda u$ con $u \in C^2_{per} \setminus \{0\}$:
$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(-\pi) = u(\pi) \\ u'(-\pi) = u(\pi) \end{cases}$$

Caso $\lambda = 0$: $u(x) = Ax + B \xRightarrow{\text{cond iniz}} A = 0$

Span$_{\mathbb{C}}(1)$ (che è il 1° el. della base di Fourier)

Caso $\lambda > 0$: $u(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$u(\pi) = u(-\pi) \Longrightarrow Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = Ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{\sqrt{\lambda}\pi} \longrightarrow A = B$

$u'(\pi) = u'(-\pi) \Longrightarrow A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\pi} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = A\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - B\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\pi} \longrightarrow A = B = 0$

Caso $\lambda < 0$: $\lambda = -\mu^2$ $u(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$

$$\begin{cases} u(\pi) = u(-\pi) \\ u'(\pi) = u'(-\pi) \end{cases} \xrightarrow{\text{conti}} \mu \in \mathbb{Z}$$

$\sin(nx), \cos(nx)$, con $\lambda = -n^2$

Trasformata di Fourier

Definiamo la trasformata di Fourier

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \longrightarrow C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy}\, dx =: \hat{f}(y)$

ben definita puntualmente: fisso $y \in \mathbb{R}$, $f \in L^1$, $e^{-ixy} \in L^\infty$

$\Longrightarrow \mathcal{F}(f)(y)$ ben definita

- presa $y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R}$, applico il Teo di Lebesgue

  $f_n(x) = f(x)\, e^{-ixy_n} \in L^1$, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)\, e^{-ixy}$

  $\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, e^{-ixy_n}\, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy}\, dx$

- presa $y_n \longrightarrow \pm\infty$, si ha $\mathcal{F}(f)(y_n) \longrightarrow 0$

  applico il Lemma di Riemann-Lebesgue generalizzato

  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{e^{-ixy}}_{\varphi(yx)} \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \int_0^{\pi} e^{-it} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$

  $\varphi(t) = e^{-it}$ 2π-periodica

- $\mathcal{F}$ è lineare (per la linearità dell'integrale)
- $\mathcal{F}$ è continuo da $(L^1, \|\cdot\|_{L^1})$ in $(C^0(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$

  $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy} dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|\, |e^{-ixy}| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})}$

  $\mathcal{F}$ è limitato e lineare, quindi continuo

<u>Proprietà</u>: comportamento attraverso operazioni come traslazioni/omotetie

Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\forall h \in \mathbb{R}$ si ha

- $\widehat{f(\cdot + h)}(y) = e^{ihy}\, \hat{f}(y)$

  $\int f(x+h)\, e^{-ixy} dx = \int f(x+h) e^{-i(x+h)y}\, e^{+ihy} dx$

- $\widehat{e^{ihx} f(\cdot)} = \hat{f}(y-h)$

  $\int f(x) e^{ihx}\, e^{-ixy} = \int f(x)\, e^{-i(y-h)x}$

- $\lambda \neq 0$, $\widehat{f(\lambda x)} = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$

  $\int f(\lambda x)\, e^{-ixy} \underset{z=\lambda x}{=} \frac{1}{|\lambda|} \int f(z)\, e^{-iz\frac{y}{\lambda}} dz$

Proposizione Sia f tale che $(1+|x|) f(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e vale $(\hat{f})'(y) = \widehat{-ix f(x)}(y)$.

DIMOSTRAZIONE

$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy} dx$

Posso derivare sotto segno di integrale:

$\hat{f}'(y) = \widehat{-ix f(x)}(y)$ $\square$

Proposizione Sia f tale che $(1+|x|^k) f(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Allora $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e vale $D^k \hat{f}(y) = \widehat{(-ix)^k f}(y)$.

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su k. $\square$

proposizione Sia $f \in C^1_{tratti}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $f', f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Allora $\widehat{f'}(y) = iy\hat{f}(y)$.

DIMOSTRAZIONE

Uso il fatto che posso integrare per parti sui limitati e f ha limite 0 a $\pm\infty$.

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ixy} dx \underset{\text{per ConDom}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f'(x) e^{-ixy} dx$$

$$\int_{-R}^{R} f'(x) e^{-ixy} dx \underset{\text{parti}}{=} f(x)e^{-ixy}\Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f(x) \frac{d}{dx} e^{-ixy} dx =$$

$$= f(R)e^{-iyR} - f(-R)e^{iyR} + iy\int_{-R}^{R} f(x) e^{-ixy} dx$$

Passo al limite su R, osservando

$f \in L^1 \Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ixy} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$

Se mostro che $f(R), f(-R) \longrightarrow 0$ per $R \to \pm\infty$, ho finito.

$f(R) = \int_0^R f'(t)dt + f(0)$

Noto che $f' \in L^1 \Rightarrow \exists \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f'(t)dt = \int_0^{+\infty} f'(t)dt \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(R)$ ha limite a $+\infty$, e $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ □

proposizione Sia $f \in C^k_{tratti}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $f, f', \dots, D^k f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Allora $\widehat{D^k f}(y) = (iy)^k \hat{f}(y)$.

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su k. □

proposizione Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$
Allora $\widehat{f * g}(y) = \hat{f}(y)\hat{g}(y)$.

DIMOSTRAZIONE

$$\widehat{f*g}(y) = \int_{\mathbb{R}} f*g(x) e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz\right) e^{-ixy} dx \overset{FT}{=}$$

$\varphi(x,z) = f(x-z)g(z)e^{-ixy} \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$

$$\int |f(x-z)g(z)e^{-ixy}| dxdz = \int |g(z)| \left(\int |f(x-z)| dx\right) dz = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty$$

$$\overset{FT}{=} \int_{\mathbb{R}} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-z) e^{-ixy} dx\right) dz = \int_{\mathbb{R}} g(z)\hat{f}(y) e^{-izy} dz = \hat{f}(y)\hat{g}(y)$$ □

esempio $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$

Posso calcolare $\hat{f}(y)$

Provo a cercare una ODE del 1° ordine risolta da $\hat{f}$

$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$

$\widehat{(f'(x)} = \widehat{-ixf(x)}) = \hat{f}'(y)$

$i\hat{f}'(y) = i^2 y \hat{f}(y)$

$\Rightarrow \hat{f}(y) = Ke^{-\frac{y^2}{2}}$, $\hat{f}(0) = K = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

Applicazioni della trasformata

- ODE's

esempio Consideriamo l'eq. diff. nella variabile u:

$$u''(x) - u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Cerco soluzioni t.c. $u, u', u'' \in L^1(\mathbb{R})$

Applico la trasformata

$$\widehat{u''-u}\,(y) = \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}\,(y) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\overset{\shortparallel}{\widehat{u''}(y) - \hat{u}(y)}$$

$$\overset{\shortparallel}{iy\,\widehat{u'}(y)} = (iy)^2\, \hat{u}(y)$$

$$\Longrightarrow -\hat{u}(y)(1+y^2) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \hat{u}(y) = -\frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}}}{1+y^2}$$

Se trovo $g \in L^1$ t.c. $\hat{g}(y) = -\frac{1}{1+y^2}$, $\hat{u}(y) = \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(y)\, \hat{g}(y) = \widehat{g * e^{-\frac{x^2}{2}}}\,(y)$

Se la trasformata è iniettiva, $u(x) = g * e^{-\frac{x^2}{2}}(x)$ è soluzione

Infatti si verifica $u \in C^2$, $u, u', u'' \in L^1$

Da una ODE di grado k in u arrivo ad una in $\hat{u}$ del tipo

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{P(y)}\, \underbrace{\hat{\varphi}}_{\text{termine noto in } L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})}$$

Ci si chiede quando si può "tornare indietro"

A questo scopo si introduce l'antitrasformata

$$\mathcal{F}^* : L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

$$\mathcal{F}^*(u)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y)\, e^{ixy}\, dy = \hat{u}(-x)$$

(il simbolo $\mathcal{F}^*$ indica l'operatore aggiunto associato a $\mathcal{F}$)

$\mathcal{F}^*$ ha le stesse buone proprietà di $\mathcal{F}$

NOTAZIONE $\mathcal{F}^*(u) = \check{u}$

> **Proposizione: formula di inversione** Sia $u \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora vale
> $$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(u))(x) = 2\pi\, u(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo mostrare che per q.o. $x \in \mathbb{R}$ $\check{\hat{u}}(x) = 2\pi u(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)\, e^{ixy}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x')\, e^{-ix'y}\, dx' \right) e^{ixy}\, dy$$

Idea per scambiare l'ordine di integrazione: introdurre una funzione ausiliaria che dà sommabilità, anzi una successione $g_\delta(y)$ t.c. per $\delta \to 0$, $g_\delta(y) \longrightarrow 1$ q.o. $y \in \mathbb{R}$

e $\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)\, e^{ixy}\, dy = \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)\, g_\delta(y)\, e^{ixy}\, dy$

questo uguale seguirà da ConDom, una volta selezionata g_δ t.c. $\|g_\delta\|_{L^\infty} \le C$ (perché $\hat{u} \in L^1$)

Ad esempio, scelgo $g_\delta(y) = e^{-\delta^2 \frac{y^2}{2}} \longrightarrow 1$ q.o. y e $\|g_\delta\|_{L^\infty} \leq 1$

Mi sposto a calcolare

$$\int_\mathbb{R} \hat{u}(y) g_\delta(y) e^{ixy} dy = \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} u(x') e^{-ix'y} dx' \right) g_\delta(y) e^{ixy} dy$$

$$\Phi(x', y) = \underset{L^1(\mathbb{R}_{x'}, \mathbb{C})}{\underset{\cap}{u(x')}} \underset{L^1(\mathbb{R}_y, \mathbb{C})}{\underset{\cap}{g_\delta(y)}} \underset{L^\infty}{\underset{\cap}{e^{-ix'y}}} \underset{L^\infty}{\underset{\cap}{e^{ixy}}} \implies \Phi \in L^1(\mathbb{R}_{x'} \times \mathbb{R}_y; \mathbb{C})$$

Infatti $\int_{\mathbb{R}^2} |\Phi(x', y)| dx' dy \leq \int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} |u(x')| |g_\delta(y)| dy \right) dx' =$

$= \int_\mathbb{R} |u(x')| dx' \int_\mathbb{R} |g_\delta(y)| dy = \|g_\delta\|_{L^1} \|u\|_{L^1} < +\infty$

$$\implies \int_\mathbb{R} \hat{u}(y) g_\delta(y) e^{ixy} dy = \int_\mathbb{R} u(x') \Big(\underbrace{\int_\mathbb{R} g_\delta(y) e^{ixy} e^{-ix'y} dy}_{\hat{g}_\delta(x'-x)} \Big) dx' =$$

$$= \int_\mathbb{R} u(x') \hat{g}_\delta(x'-x) dx'$$

g_δ pari $\implies \hat{g}_\delta$ pari $\implies$ quella è una convoluzione

Calcoliamo $\hat{g}_\delta$; introduciamo $h(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$

$\hat{h}(y) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$ $\qquad g_\delta(y) = h(\delta y)$

$$\implies \hat{g}_\delta(y) = \widehat{h(\delta \cdot)} = \frac{1}{\delta} \hat{h}\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta} \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}}$$

$$\int_\mathbb{R} \hat{u}(y) g_\delta(y) e^{ixy} dy = \int_\mathbb{R} u(x') \sqrt{2\pi} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\delta^2}} dx' = \sqrt{2\pi}\, u * \frac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)^2} \longrightarrow \sqrt{2\pi}\, u * m = 2\pi u(x)$$

$$m = \int_\mathbb{R} h(y) dy = \sqrt{2\pi}$$

$\square$

corollario $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ è iniettivo.

DIMOSTRAZIONE

$\mathcal{F}$ lineare, quindi $\mathcal{F}$ iniettiva sse $\mathcal{F}(u) = 0 \iff u = 0$

Se $\hat{u} = 0 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, vale la formula di inversione

$\implies \check{\hat{u}} = \check{0} = 2\pi 0 = 0$ $\quad$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$ $\quad \square$

<u>Oss</u> La formula di inversione vale su $\mathcal{F}^{-1}(C_0^0(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})) \subseteq L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

La trasformata ha immagine più ampia di $C_0^0(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

Basta calcolare alcune trasformate di base

$\chi_{[a,b]}(x)$, $xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$, $e^{-|x|}$, $\sin(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Oss
- f pari $\implies \hat{f}$ pari: $\hat{f}(y) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$
- f pari + reale $\implies \hat{f}$ pari + reale
- f dispari $\implies \hat{f}$ dispari: $\hat{f}(y) = 2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$

  f dispari + reale $\implies \hat{f}$ dispari + immaginaria pura

Trasformate notevoli

(1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$: $\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$

(2) $f(x) = e^{-|x|}$. $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$

$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ixy}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(xy)\,dx$

Detto $I := \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(xy)\,dx$,

$I = [-e^{-x}\cos(xy)]_0^{+\infty} - y\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(xy)\,dx = 1 - y[-e^{-x}\sin(xy)]_0^{+\infty} - y^2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(xy)\,dx =$

$= 1 - y^2 I \implies I = \frac{1}{1+y^2}$

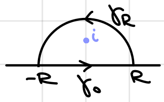
(3) $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$: $\hat{f}(y) = \frac{2}{y}\sin(ay)$

$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ixy}\,dx = \int_{-a}^{a} e^{-ixy}\,dx = 2\int_0^a \cos(xy)\,dx = \frac{2}{y}\sin(ay)$

(4) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\hat{f}(y) = \pi e^{-|y|}$

Definisco $g(z) := \frac{e^{-iyz}}{1+z^2}$ olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$

Suppongo $y \le 0$.



$D_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R, \operatorname{Im}(z) \ge 0\}$

Per il Teorema dei residui:

$\int_{-R}^{R} g(z)\,dz + \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\partial D_R^+} g(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(g, z_j)$

Ora valgono:

(a) $\int_{-R}^{R} g(z)\,dz \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} g(z)\,dz$

(b) $\int_{\gamma_R} g(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

Infatti, se $z = x+it$, $-iyz = -iyx + yt$ $\operatorname{Re}(-iyz) \le 0$

Se $|z| = R$, $|g(z)| = O(\frac{1}{R^2})$ per $R \to +\infty$.

$\implies |\int_{\gamma_R} g(z)\,dz| \le \int_{\gamma_R} |g(z)|\,dz \le \int_{\gamma_R} \frac{|e^{-iyz}|}{R^2-1}\,dz \le \pi R\, O(\frac{1}{R^2}) = \pi O(\frac{1}{R}) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

(c) $\operatorname{Res}(g, i) = \frac{e^{-iy(i)}}{2i} = \frac{e^{y}}{2i}$

Quindi $\int_{\partial D_R^+} g(z)\,dz = \pi e^{y}$

Poiché g è pari, otteniamo: $\hat{f}(y) = \pi e^{-|y|}$

Estensione della trasformata di Fourier a $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$

Primo passo: dimostrare che $\mathcal{F}|_{L^1\cap L^2}$ è una $\sqrt{2\pi}$ - isometria

Proposizione: identità di Plancherel Sia $u \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora
$\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = 2\pi \langle u, u \rangle$, cioè
$\hat{u} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\|\hat{u}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L^2}$.

DIMOSTRAZIONE

Stessa idea di prima: vedo $\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(y)|^2 dy = \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(y)|^2 g_\delta(y)\,dy$
dove $g_\delta(y) = e^{-\frac{(\delta y)^2}{2}}$

L'uguale non vale per conDom (perché non so ancora che $|\hat{u}|^2 \in L^1$), ma posso utilizzare Beppo Levi: $g_\delta(y) \nearrow 1$ (passando a $\delta_n \searrow 0$, g_{δ_n} crescente).

Mi sposto a calcolare $\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(y)|^2 g_\delta(y)\,dy =$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)\cdot\overline{\hat{u}(y)}\, g_\delta(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x') e^{-ix'y} dx'\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{u(z)}\, e^{izy} dz\right) g_\delta(y)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{u(x')\,\overline{u}(z)\, e^{-ix'y}\, e^{iyz}\, g_\delta(y)}_{\in L^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})}\, dx'\,dy\,dz =$$

$\underset{L^1(\mathbb{R}_x)}{|u(x')|}\ \underset{L^1(\mathbb{R}_z)}{|\overline{u}(z)|}\ \underset{L^1(\mathbb{R}_y)}{|g_\delta(y)|}$ tutto come prima

$$= \int_{\mathbb{R}} u(x') \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{u}(z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g_\delta(y) e^{-i(x'-z)y} dy\right)}_{\hat{g}_\delta(x'-z)} dz\right) dx' =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(x') \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{u}(z)\, \hat{g}_\delta(x'-z)\,dz\right) dx' = \int_{\mathbb{R}} u(x')\ \overline{u}*\hat{g}_\delta(x')\,dx' =$$

$\hat{g}_\delta = \overline{\hat{g}_\delta}$ perché g_δ reale

$$= \langle u, u*\hat{g}_\delta \rangle = \langle u, u*\hat{g}_\delta \rangle = \langle u, \sqrt{2\pi}\ \underset{\downarrow\ 2\pi u}{u * \tfrac{1}{\delta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)^2}} \rangle \xrightarrow[\delta\to 0]{} 2\pi\langle u,u\rangle \qquad \square$$

Corollario Per ogni $u_1, u_2 \in L^1 \cap L^2$, si ha
$\langle \hat{u}_1, \hat{u}_2 \rangle = 2\pi \langle u_1, u_2 \rangle$.

DIMOSTRAZIONE

Segue dall'identità di polarizzazione. $\square$

Corollario Esiste unica $\tilde{\mathcal{F}}: L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ definita come estensione continua dell'isometria $\mathcal{F}|_{L^1\cap L^2}$.

DIMOSTRAZIONE

Presa $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \setminus L^1$, poiché $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2, scelgo $(u_n) \subseteq L^1 \cap L^2$ t.c. $u_n \longrightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Allora, per l'identità di Plancherel, la successione $(\hat{u}_n)$ è di Cauchy in L^2, essendo immagine di una successione convergente in L^2. Definisco $\hat{u} = \lim_{n\to+\infty} u_n$ in L^2

E' facile vedere che $\hat{u}$ non dipende dalla scelta di u_n.

(estensione sulla chiusura di funzione uniformemente continua) $\square$

Come si definisce operativamente $\tilde{\mathcal{F}}$ (che indicheremo anch'essa $\mathcal{F}$)
Presa $f \in L^2 \cap L^1$, si considera $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ in L^2
Allora $\hat{f} = \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n$ in L^2, dove $\hat{f}_n$ è ben definita perché $f_n \in L^1$
A meno di sottosuccessioni, per q.o. $y \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(y) = \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(y) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ixy} dx$

Si estendono i risultati visti per $\hat{}_{L^1}$
(operazioni di traslazione e omotetia e "derivazione")

Proposizione Sia $f \in C^1_{tratti}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Se $f \in L^1 \cup L^2$ e $f' \in L^1 \cup L^2$, allora $\hat{f'}(y) = iy\hat{f}(y)$.

DIMOSTRAZIONE
Oss se $h \in L^1$, $\liminf_{x\to\pm\infty} |h(x)| = 0$
Idea: integrazione per parti
Scelgo x_n^1, x_n^2 t.c. $x_n^1 \to -\infty$, $x_n^2 \to +\infty$ e $f(x_1), f(x_2) \to 0$
($h = f$ se $f \in L^1$, $h = f^2$ se $f \in L^2$)
$\int_{x_n^1}^{x_n^2} f'(x) e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \mathbb{1}_{[x_n^1, x_n^2]} e^{-ixy} dx \xrightarrow[\text{a meno di ssc}]{n\to+\infty} \hat{f'}(y)$
Infatti $f'(x)\mathbb{1}_{[x_n^1,x_n^2]} \longrightarrow f'(x)$
Se $f' \in L^1$, per Teo. Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} f'(x) \mathbb{1}_{[x_n^1,x_n^2]} e^{-ixy} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ixy} dx$
Se $f' \in L^2$, $g_n := f'(x)\mathbb{1}_{[x_n^1,x_n^2]} \xrightarrow{L^2} f'(x)$ per Lebesgue
$\Longrightarrow \hat{g}_n \xrightarrow{L^2} \hat{f}$
$\Longrightarrow$ a meno di ssc, tende puntualmente q.o
Ora integriamo per parti su $[x_n^1, x_n^2]$:
$\int_{x_n^1}^{x_n^2} f'(x) e^{-ixy} dx = f(x) e^{-ixy}\Big|_{x_n^1}^{x_n^2} - \int_{x_n^1}^{x_n^2} f(x)(-iy) e^{-ixy} dx =$
$= f(x_n^2) e^{-ix_n^2 y} - f(x_n^1) e^{-ix_n^1 y} + iy \int_{x_n^1}^{x_n^2} f(x) e^{-ixy} dx$
$\downarrow$ 0 $\quad$ $\downarrow$ 0 $\quad$ $\downarrow$ sempre a meno di ssc
$iy \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx = iy \hat{f}(y)$ $\square$

Proposizione Sia $f \in C^1_{tratti}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con $f \in L^1$, $f' \in L^2$.
Allora $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e vale la formula di inversione.

DIMOSTRAZIONE
Dalla Prop. precedente, abbiamo $\hat{f'}^{L^2}(y) = iy\hat{f}(y) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ poiché $f' \in L^2$.
Per dimostrare che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, basta mostrare $\hat{f} \in L^1(B_1^c, \mathbb{C})$
(infatti $\hat{f} \in C^0_0 \Rightarrow \hat{f} \in L^1(B_1, \mathbb{C})$)
$\int_{B_1^c} |\hat{f}(y)| dy = \int_{B_1^c} |\hat{f}(y)||y| \cdot \frac{1}{|y|} dy = \int_{B_1^c} \underbrace{|\hat{f'}(y)|}_{\in L^2} \underbrace{\frac{1}{|y|}}_{\in L^2} dy \overset{H}{\leq}$
$\leq \sqrt{\left(\int_{B_1^c} |\hat{f'}(y)|^2 dy\right)\left(\int_{B_1^c} \frac{1}{|y|^2} dy\right)} < +\infty$ $\square$

corollario Per le funzioni $C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$, vale la formula di inversione.

corollario $C^1_c \subseteq \operatorname{Im}\check{\mathcal{F}}$, quindi $\hat{\ }^{L^2}$ è surgettiva.

Abbiamo visto che se $u, v \in L^1$, allora $\widehat{u*v}(y) = \hat{u}(y)\hat{v}(y)$.

proposizione Siano $u, v \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora
$$\widehat{u\cdot v}^{L^1}(y) = \frac{1}{2\pi}\hat{u}^{L^2} * \hat{v}^{L^2}(y).$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo il risultato per densità.

Siano $u, v \in C^1_c(\mathbb{R};\mathbb{C}) \Longrightarrow$ per u, v vale la formula di inversione e anche per $uv \in C^1_c$.

Quindi $\check{\widehat{uv}} = 2\pi uv$, $\check{\hat{u}} = 2\pi u$, $\check{\hat{v}} = 2\pi v$

Per dimostrare la tesi, uso $\widehat{uv} \in L^1$, $\hat{u} * \hat{v} \in L^1$ (perché $u, v \in L^1 \cap L^2$) e per iniettività della trasformata su L^1, è equivalente dimostrare che
$$\underset{2\pi uv}{\overset{\parallel}{\check{\widehat{uv}}}} = \frac{1}{2\pi}\widecheck{\hat{u}*\hat{v}} = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{u}}\ \check{\hat{v}} = \frac{1}{2\pi}2\pi u \cdot 2\pi v = 2\pi uv$$

Supponiamo ora $v \in C^1_c$, $u \in L^2$.

Scelgo $(u_n) \subseteq C^1_c$ t.c. $u_n \xrightarrow{L^2} u$

Applico il risultato a u_n e v: $\widehat{u_n v}^{L^1}(y) = \frac{1}{2\pi}\hat{u}_n^{L^1} * \hat{v}^{L^1}(y)$

Dato che $u_n \xrightarrow{L^2} u$, $u_n v \xrightarrow{L^1} uv$ perché $\int_{\mathbb{R}} |u_n v - uv| \underset{H}{\leq} \|u_n - u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \longrightarrow 0$

e $\hat{u}_n^{L^1} \xrightarrow{L^2} \hat{u}^{L^2} \Longrightarrow \hat{u}_n^{L^1} * \hat{v}^{L^1} \longrightarrow \hat{u}^{L^2} * \hat{v}^{L^1}$ perché la convoluzione è continua.

È analogo per $u, v \in L^2$. $\square$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,y\rangle}\, dx_1 \dots dx_d$$

Valgono proprietà analoghe a quelle per $d=1$:

- $\forall h \in \mathbb{R}$ $\widehat{f(\cdot+h)}(y) = e^{i\langle y,h\rangle}\, \hat{f}(y)$
- $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$ con $\det A \neq 0$ $\qquad \widehat{f(Ax)}(y) = \frac{1}{|\det A|}\, \hat{f}((A^{-1})^t y)$

  Infatti:

  $$\widehat{f(Ax)}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)\, e^{-i\langle x,y\rangle}\, dx \underset{z=Ax}{=} \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, e^{-i\langle A^{-1}z,y\rangle}\, dz = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, e^{-i\langle z,(A^{-1})^t y\rangle}\, dz =$$
  $$= \frac{1}{|\det A|}\, \hat{f}((A^{-1})^t y)$$

- se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, vale la formula di inversione d-dimensionale:
  $$\check{\hat{f}}(y) = (2\pi)^d f(y) \quad \text{per q.o. } y \in \mathbb{R}^d$$
- Plancherel: se $f \in L^1 \cap L^2$, $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2}$
- se $f \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ con $f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1$, allora
  $$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(y) = i y_j\, \hat{f}(y)$$
- se $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, $\qquad \widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$

esempio Calcoliamo la trasformata di $f(x) = e^{-Ax\cdot x}$, $A \in S(d)$ definita positiva.

Per il Teorema spettrale, $\exists M \in O(d)$ t.c. $MAM^T = D^2$ con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0$

$MAM^T = D^2 \implies A = M^T D^2 M = (M^T D M)^2$

Allora, detta $R := M^T D M$, $R^T = A$, abbiamo $Ax\cdot x = R^2 x \cdot x = |Rx|^2$

Posta $G(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$, allora $f(x) = G(Rx)$

Inoltre $\hat{G}(y) = (2\pi)^{d/2}\, G(y)$.

Quindi la trasformata di f è:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{|\det R|}\, \hat{G}(R^{-1}y) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{|\det R|}\, G(R^{-1}y) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{|\det R|}\, e^{-\frac{1}{2}|R^{-1}y|^2}$$

Applicazione alla risoluzione di (EC) in $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Cerchiamo u di classe $C^0([0,+\infty)\times\mathbb{R};\mathbb{R})$, C^1 in t, C^2 in x,
$u(t,x), u_t(t,x), u_{xx}(t,x) \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ $\forall t>0$. $u_0(x)\in L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Supponendo esistenza di una soluzione con queste ipotesi, cerchiamo delle condizioni su u.

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)\, e^{-ixy}\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_{xx}(t,x)\, e^{-ixy}\,dx \qquad \text{con } y\in\mathbb{R}$$

$$\hat{u}_t(y) \qquad\qquad \hat{u}_{xx}(y) = iy\,\hat{u}_x(y) = (iy)^2\,\hat{u}(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\hat{u}(t,\cdot) = \hat{u}_t(y) = -y^2\,\hat{u}(y)$$

Teo di derivazione sotto segno di integrale

Allora $\varphi(t) := \hat{u}(t,\cdot)$ verifica $\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = -y^2\varphi(t) \\ \varphi(0) = \hat{u}_0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = \hat{u}_0(y)\, e^{-y^2 t} = \widehat{u(t,\cdot)}(y)$$

se trovo $\psi(x)$ t.c. $e^{-y^2 t} = \hat{\psi}(y)$

Torniamo alla $h(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$, $\hat{h}(y) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$

per $\lambda>0$: $\widehat{h(\lambda x)} = \frac{1}{\lambda}\hat{h}\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$

Cerchiamo λ t.c. $\hat{h}\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = e^{-y^2}$.

$$h(\lambda x) = e^{-\frac{(\lambda x)^2}{2}} \Longrightarrow \widehat{h(\lambda x)} = \sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\lambda}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow 2\lambda^2 = \frac{1}{t} \Longrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{2t}} \quad (t>0 \text{ per (EC)})$$

Quindi $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda h(\lambda x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t^2}}$

$$\Rightarrow \widehat{u(t,\cdot)} = \hat{u}_0 e^{-y^2 t} = \hat{u}_0(y)\,\hat{\psi}(y) = \widehat{u_0 * \psi}$$

$$\Longrightarrow u(t,x) = u_0 * \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t^2}} \qquad t>0 \quad \text{(approssimazione per convoluzione)}$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

FUNZIONI ARMONICHE

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.
Una funzione $u: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(\Omega)$ si dice **armonica** se

$$\Delta u(x) := \operatorname{div}(\nabla u(x)) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

$\Delta u = 0$ eq.ne di Laplace
$\Delta u = f$ eq.ne di Poisson

Oss $\Delta u(x) = 0 \implies F = \nabla u$ ha flusso nullo attraverso ∂A $\forall A \subseteq \Omega$ aperto regolare

$$\int_A \operatorname{div}(\nabla u)\,dx = \int_{\partial A} \langle \nabla u, \nu(x) \rangle \, ds_{\partial A} = 0$$

esempio $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ è armonica su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

C'è un collegamento naturale con le funzioni olomorfe su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow x+iy \in \mathbb{C}$
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa
$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+iy)) + i \operatorname{Im}(f(x+iy))$

Proposizione Se f è olomorfa su $A \subseteq \mathbb{R}^2$, allora $u := \operatorname{Re}(f)$ e $v := \operatorname{Im}(f)$ sono armoniche su A.

DIMOSTRAZIONE
Vale per u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \overset{CR}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \overset{CR}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Per Schwarz. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
Analogo per v. $\square$

Proposizione Se Ω è semplicemente connesso e $u: \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica, allora esiste f olomorfa t.c.

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo la 1-forma

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Poiché u è aronica, ω è chiusa, infatti

$$d\omega = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 0$$

Poiché Ω è semplicemente connesso, ω è esatta:
$\exists v: \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $dv = \omega$, ossia

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \implies f(x,y) := u(x,y) + i v(x,y) \text{ verifica Cauchy-Riemann}$$

$\implies f$ olomorfa $\square$

DEF. Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Si dice che u ha la **Proprietà di media su palle (MP)** se

$\forall x_0 \in \Omega \quad \forall 0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) \qquad \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,dx = u(x_0)$.

Si dice che u ha la **Proprietà di media su sfere (MS)** se

$\forall x_0 \in \Omega \quad \forall 0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) \qquad \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, d\sigma_{\partial B_r(x_0)}(y) = u(x_0)$.

<u>OSS</u> $\partial B_r(x_0)$ è una $(d-1)$-superficie in $\mathbb{R}^d$

Esiste una misura di superficie $\sigma_{\partial B_r(x_0)}$, che

è invariante per traslazioni e $\sigma_{\partial B_r(x_0)} =: \sigma_r(E) = r^{d-1}\, \sigma_1\left(\frac{E}{r}\right) \quad \forall r > 0$

Deriva dal fatto che, dato $z \in \partial B_1 = S^{d-1}$,

$z \longmapsto x_0 + rz = y \in \partial B_r(x_0)$

Proposizione Data $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, (MP) è equivalente a (MS).

DIMOSTRAZIONE

Identità chiave: $\forall f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) \qquad \int_{B(x_0,r)} f(x)\,dx = \int_0^r \int_{\partial B(x_0,\rho)} f(y)\, d\sigma_\rho(y)\, d\rho$

Segue dal passaggio in coordinate polari:

($\Longleftarrow$) Sia $x_0 \in \Omega$ e $r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$

$$\int_{B(x_0,r)} u(x)\,dx = \int_0^r \int_{\partial B(x_0,\rho)} u(y)\, d\sigma_\rho(y)\, d\rho \overset{(MS)}{=} \int_0^r u(x_0)\, \sigma_\rho(\partial B(x_0,\rho))\, d\rho =$$
$$= \int_0^r \rho^{d-1} u(x_0)\, d\omega_d\, d\rho = \rho^d \Big|_0^r \omega_d\, u(x_0) = u(x_0)\, \mathcal{L}(B(x_0,r))$$

($\Longrightarrow$) Sia $x_0 \in \Omega$ e $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$

Per (MP), $u(x_0)\,\omega_d r^d = \int_{B(x_0,r)} u(x)\,dx = \int_0^r \int_{\partial B(x_0,\rho)} u(y)\, d\sigma_\rho(y)\, d\rho$

Pongo $g(\rho) := \int_{\partial B(x_0,\rho)} u(y)\, d\sigma_\rho(y) = \int_{\partial B_1} \rho^{d-1}\, u(x_0 + \rho z)\, d\sigma(z)$

Ora $g : [0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua

Infatti, fisso $\bar\rho$ e $\rho_n \longrightarrow \bar\rho$, $u(x_0 + \rho_n z) \longrightarrow u(x_0 + \bar\rho z)$ perché $u \in C^0$

$|u(x_0 + \rho_n z)| \le \|u\|_{L^\infty(\overline{B}(x_0,r))}$ e si conclude per ConDom

Quindi $u(x_0)\,\omega_d r^d = \int_0^r g(\rho)\,d\rho \quad \forall r \in [0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$

Derivando in r (con il TFCI): $u(x_0) \underbrace{d\omega_d r^{d-1}}_{\sigma_r(\partial B(x_0,r))} = g(r) = \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\, d\sigma_r(y)$

$\square$

Proposizione Sia $u \in C^0(\Omega)$ con (MS). Allora $u \in C^\infty(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE

Osservo che la proprietà di essere C^∞ è locale.

$\forall x \in \Omega$ basta dimostrare $\exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ t.c. $u|_U = v|_U \in C^\infty(U)$

Fisso $x_0 \in \Omega$, $\exists r > 0$ t.c. $B(x_0, 2r) \subset \Omega$

Voglio dimostrare che $u(x)$ su $B(x_0, r)$ coincide con una convoluzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Scelgo una funzione cut-off $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; [0,1])$ t.c. $\operatorname{supp}\psi \subseteq B(0,r)$ e $\int_{\mathbb{R}^d} \psi \, dx = 1$ e $\psi(x) = \varphi(|x|)$

Estendo u a 0 fuori Ω: $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega' \subset\subset \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega'^c \end{cases}$ con $x_0 \in \Omega'$

Ora $\tilde{u} \in L^1_{loc}(\Omega)$ (ad esempio $\Omega' = \overline{B(x_0, 2r)}$)

Quindi $\tilde{u} * \psi$ è ben definita e di classe C^∞

Dico che $\forall \bar{x} \in B(x_0, r)$, $u(\bar{x}) = \tilde{u} * \psi(\bar{x})$

$$\tilde{u} * \psi(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(\bar{x}-y)\psi(y)\,dy = \int_{B(0,r)} \tilde{u}(\bar{x}-y)\psi(y)\,dy \underset{\text{se } y \in B(0,r),\ \bar{x}-y \in B(\bar{x},r) \subset B(x_0,2r)}{=} \int_{B(0,r)} u(\bar{x}-y)\psi(y)\,dy =$$

$$= \int_0^r \Big(\int_{\partial B(0,\rho)} u(\bar{x}-y) \underbrace{\psi(y)}_{=\varphi(|y|)} \, d\sigma(y) \Big) d\rho = \int_0^r \varphi(\rho) \int_{\partial B(0,\rho)} u(\bar{x}-y)\,d\sigma(y)\,d\rho = \int_0^r \varphi(\rho) \int_{\partial B(\bar{x},\rho)} u(z)\,d\sigma(z)\,d\rho =$$

$$\overset{(MS)}{=} \int_0^r \varphi(\rho)\, \sigma(\partial B(0,\rho))\, u(\bar{x})\,d\rho = \int_0^r \varphi(\rho)\, d\omega_d \rho^{d-1} u(\bar{x})\,d\rho = u(\bar{x}) \int_0^r d\omega_d \varphi(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho =$$

$$= u(\bar{x}) \int_0^{+\infty} d\omega_d \varphi(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho = u(\bar{x}) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx = u(\bar{x})$$

$\square$

Proposizione Sia $u \in C^0(\Omega)$. Allora u verifica (MP) o (MS) $\Longleftrightarrow$ $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ su Ω.

DIMOSTRAZIONE

<u>Idea</u>: fissato $x_0 \in \Omega$, $r \in [0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$

$$⨍_{\partial B(x_0,r)} u(y)\,d\sigma_r(y) = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\,d\sigma_r(y) = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_1} u(x_0+rz) r^{d-1}\,d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1} u(x_0+rz)\,d\sigma(z) =: h(r)$$

($\Leftarrow$) Supponiamo di avere $u \in C^2$:

possiamo derivare $h(r)$ e la derivata passa sotto il segno di integrale

$$\Longrightarrow h'(r) = \frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1} \frac{d}{dr} u(x_0+rz)\,d\sigma(y) = \frac{1}{d\omega_d} \int_{\partial B_1} \nabla u(x_0+rz) \cdot \underbrace{z}_{=\nu_{\partial B_1}(z)}\,d\sigma(y) \underset{\text{Teo. div}}{=}$$

$$= \frac{1}{d\omega_d} \int_{B_1} \Delta u(x_0+rx)\,d\sigma(x) = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B(x_0,r)} \Delta u(w)\,dw$$

u armonica $\Longrightarrow h'(r) \equiv 0 \Longrightarrow h(r)$ costante

Quindi $h(r) = \lim_{r \to 0^+} h(r) = u(x_0)$

($\Longrightarrow$) Sia u con (MS) $\Longrightarrow u \in C^\infty$

$\Longrightarrow h'(r) = 0 \Longrightarrow \int_{B(x_0,r)} \Delta u(w)\,dw = 0 \ \forall x_0, r \Longrightarrow \Delta u = 0$ su Ω $\square$

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto connesso, $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica tale che $\exists x_0$ punto di massimo (o minimo) per u su Ω. Allora u è costante su Ω.

DIMOSTRAZIONE

Sia $E = \{x \in \Omega \mid u(x) = \max_{\Omega} u\}$

$E \neq \emptyset$ perché $x_0 \in E$.

E è chiuso, infatti $E = u^{-1}(u(x_0))$

- E è aperto: uso (MP) in x_0 con $r>0$ t.c. $B(x,r) \subseteq \Omega$

$u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(x)dx \leq \fint_{B(x_0,r)} u(x_0)dx = u(x_0)$ quindi è un'uguaglianza

$\Rightarrow \fint_{B(x_0,r)} u(x_0) - u(x)\, dx = 0 \Rightarrow u(x_0) = u(x)$ in un intorno di x_0

e questo vale $\forall x_0 \in E$

$\square$

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato e $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica, $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Allora u ammette massimo e minimo su $\partial\Omega$. (Equivalentemente $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$, $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$).

DIMOSTRAZIONE

Per Weierstraß, esistono punti di max e min su $\overline{\Omega}$.

Sia x_0 punto di max: se fosse $x_0 \notin \partial\Omega$, detto $E = \{x \in \Omega \mid u(x) = u(x_0)\}$, per quanto visto prima u è costantemente $u(x_0)$ in A componente connessa di Ω che contiene x_0.

$\square$

corollario $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Longrightarrow u \equiv 0$

Teorema: unicità della soluzione per l'equazione di Poisson Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione di $\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u(x) = u_0(x) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato. Allora u è l'unica soluzione del problema.

DIMOSTRAZIONE

È un'equazione lineare: se u_1 e u_2 sono soluzioni, allora $w = u_1 - u_2$ è soluzione di $\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{su } \Omega \\ w(x) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Ora $w \equiv 0$ per il Teorema precedente

$\square$

Proposizione: principio di confronto

Sia Ω limitato.
Dati $u_0^1, u_0^2, g \in C^0(\overline{\Omega})$, prese u_1 e u_2 soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{su } \Omega \\ u = u_0^1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = g & \text{su } \Omega \\ u = u_0^2 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Se $u_0^1 \le u_0^2$ su $\partial\Omega$, allora $u_1 \le u_2$ su Ω.

DIMOSTRAZIONE

Guardo l'equazione risolta da $v = u_1 - u_2$:

$\Delta v = \Delta u_1 - \Delta u_2 = g - g = 0$ e $v|_{\partial\Omega} = u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega} = u_0^1 - u_0^2 \le 0$ su $\partial\Omega$

Allora $v \le 0$ su Ω: infatti $v \in C^0(\overline{\Omega})$ ammette max e min su $\overline{\Omega}$

il max è ottenuto su $\partial\Omega$. $\max_{\Omega} v = \max_{\partial\Omega} v \le 0$

$\square$

<u>Casi particolari</u> di esistenza (e calcolo) della soluzione dell'eq.ne di Laplace/Poisson

Soluzioni polinomiali su $\mathbb{R}^d$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto t.c. $\exists Q: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ forma quadratica definita positiva tale che $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Q(x) < c\}$ per qualche $c > 0$.

Allora Ω è limitato

<u>esempio</u> $B_r(0) \subset \mathbb{R}^d$ è $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Q(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 < r^2\}$

$P_M = \{$polinomi di grado $\le M\}$

Proposizione

Sia $u_0 \in P_{N+2}$, $g \in P_N$. Allora l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette sempre soluzione e la soluzione u è $u \in P_{N+2}$.

DIMOSTRAZIONE

Posso ridurmi al caso $u_0 = 0$.

Infatti, sia $v = u - u_0$, con u eventuale soluzione.

Allora v verifica la PDE: $\begin{cases} \Delta v = \Delta u - \Delta u_0 = g - \Delta u_0 & \text{su } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ e $g - \Delta u_0 \in P_N$

Invertendo l'identità $u = v + u_0$, basta dimostrare che esiste $v \in P_N$ che risolve

$$\begin{cases} \Delta v = \tilde{g} & \text{su } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega = \{x : Q(x) = c\} \end{cases} \quad \text{con } \tilde{g} \in P_N$$

Ora costruisco $T: P_N \longrightarrow P_N$ lineare (P_N spazio vettoriale finito dimensionale)

$$w \longmapsto \Delta(\underbrace{w \cdot (Q(x) - c)}_{P_{N+2}})$$

T è ben definita e lineare tra spazi finito dim. $\Rightarrow$ T è continua
Dico che T è iniettiva (e quindi surgettiva): sia w t.c. $T(w)=0$
cioè $\Delta(\underbrace{w(Q(x)-C)}_{h(x)})=0$ su Ω
è t.c. $h|_{\partial\Omega}=w(x)\,(Q(x)-C)|_{\partial\Omega}=0$
$\Rightarrow w(x)(Q(x)-C)\equiv 0 \xRightarrow[Q(x)<C \text{ su } \Omega]{} w(x)\equiv 0$.
Quindi, dato $\tilde{g}\in P_N$, $\exists w\in P_N$ t.c. $\Delta(w(Q-C))=\tilde{g}$ su Ω
Pongo $v:=w(Q-C)\in P_{N+2}$: è la v è cercata.

$\square$

Caso speciale in $\mathbb{R}^2$: $\Omega=B_1(0)$
Si consideri la PDE
$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{su } B_1(0)\\ u=u_0 & \text{su } \partial B_1(0)\end{cases}$$

<u>Oss</u> Data $u_0:\partial B_1(0)\longrightarrow\mathbb{R}$, posso considerare $h(t)=u_0(e^{it})$
$h:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ 2π-periodica

Teorema Siano $c_n(h)$ i coefficienti di Fourier di $h:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$.
Se $\{c_n(h)\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^1$, allora esiste soluzione di
$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{su } B_1(0)\\ u=u_0 & \text{su } \partial B_1(0)\end{cases}.$$

DIMOSTRAZIONE
Intuisco la forma di u dallo sviluppo di Fourier di h.
$$h(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(h)e^{int}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(h)e^{int}+c_0(h)+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(h)e^{-int}=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(h)(e^{it})^n+c_0(h)+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(h)\overline{(e^{it})^n}$$
Posso estendere questa formula da $\partial B_1\ni(x,y)\sim(e^{it})$ a $(x,y)=z\in\mathbb{C}$:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(h)z^n+c_0(h)+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(h)\bar{z}^n$$
Per $|z|<1$, dico che le 2 serie $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(h)z^n$, $\psi(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(h)z^n$
convergono totalmente, quindi uniformemente
$w(z)=\varphi(z)+c_0(h)+\overline{\psi(z)}$, $w:\{|z|\le 1\}\longrightarrow\mathbb{C}$ è olomorfa
e $w|_{|z|=1}$ coincide con u_0
$\Rightarrow \mathrm{Re}(w)$ è la funzione cercata

$\square$